

# Sistemas de Comunicación

## Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de abril de 2018

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1 [20 pts.]

Imagínese que usted es un ingeniero a principios de los años 50, cuando se comienza a discutir la implementación en Uruguay de la radio FM (patentada en 1933 y todavía en su versión mono). A su vez, usted es contratado por la asociación de operadores radio de ese momento para asesorar sobre la conveniencia o no de este sistema, y qué parámetros escoger para ser usados en nuestro país. En particular, existen dos fuertes corrientes para fijar la desviación máxima en frecuencia y el filtro de pre-énfasis. El primero, a quien denominaremos  $f_{\Delta}$  se evalúa elegir entre 50 y 75 kHz. Al segundo se lo puede escribir como:

$$H_{pre}(f) = 1 + j2\pi f\tau, \quad (1)$$

y se debate entre elegir  $\tau = 50 \mu s$  o  $\tau = 75 \mu s$ . El ancho de banda del audio a ser transmitido ya se fijó en 15 kHz y la potencia de éste no puede superar  $S_X = 1/2$ .

El objetivo sería instalar una primera antena en la cumbre del Palacio Salvo y cubrir la totalidad de Montevideo y zonas aledañas (un radio de aproximadamente 20 km). Algunas medidas y la literatura existente hacen pensar que un buen modelo para la atenuación en potencia es:

$$L(d) = 8 \times 10^{-5} d^{2.3}, \quad (2)$$

donde  $d$  es la distancia entre el receptor y la antena en metros. Además, se considera que el canal agrega un ruido blanco de densidad espectral de potencia  $N_0/2 = 0.5 \times 10^{-11} \text{ W/Hz}$  mientras que los sistemas electrónicos en recepción uno de  $N_A/2 = 0.5 \times 10^{-9} \text{ W/Hz}$ , sin correlación entre ellos.

- Realice un diagrama completo del par transmisor-receptor, explicando el objetivo y funcionamiento de cada uno de los bloques, indicando todos los parámetros correspondientes.
- Describa y justifique con qué criterio estimaría el alcance de la transmisora.
- Calcule la potencia de transmisión necesaria para cubrir la distancia deseada, en función de los parámetros posibles.
- La asociación de operadores radio desea que el gasto de operación de la futura emisora sea el mínimo posible, mientras que la calidad de audio resultante en las radios receptoras sea (cumplido lo anterior) la mejor dentro de lo posible. ¿Qué valores recomendaría entonces para  $f_{\Delta}$  y  $\tau$ ? Cuantifique el gasto y la peor calidad de audio dentro del alcance definido antes. <sup>1</sup>

---

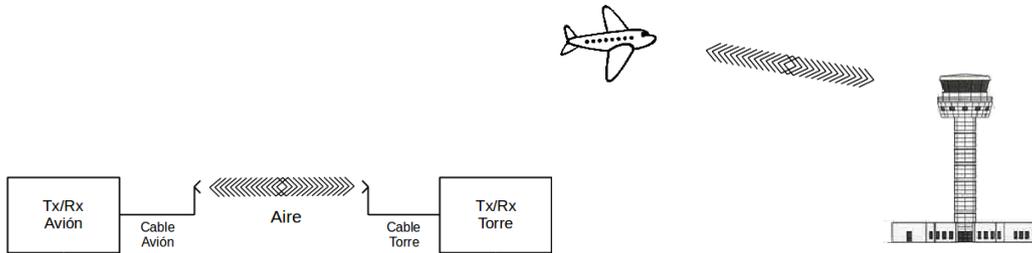
<sup>1</sup>Puede resultar de ayuda la siguiente formula:  $\int x^2/(1+a^2x^2)dx = (ax - atan(ax))/a^3 + C$ .

- (e) Viendo que usted es capaz de contestar todas las dudas que han ido surgiendo, se le amplía la contratación como asesor y lo consultan respecto a los amplificadores RF a usar. Una pesquisa en el mercado lo hacen concluir que si la señal de entrada a estos amplificadores es  $x(t)$ , la salida será  $a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t)$  (con  $a_1 = A_c$ , y el par  $a_2$  y  $a_3$  dos valores relativamente pequeños respecto a  $a_1$ ). ¿Cómo afecta esto la señal transmitida y cómo se pueden minimizar estos efectos desde el sistema transmisor? ¿Cambia la calidad de la señal detectada en los receptores?<sup>2</sup>

## Problema 2 [20 pts.]

Se desea analizar el sistema de comunicación utilizado entre el piloto y la torre de control, cuando una aeronave está próxima a su destino. Este sistema opera en las frecuencias comprendidas entre 118 MHz y 136 MHz, en la banda de VHF, y utiliza modulación AM con canales cada 25 kHz.

Se modela el canal con dos tramos de cable entre los Tx/Rx y las antenas, uno de largo  $l^a$  en el avión y otro de largo  $l^t$  en la torre de control, y un tramo intermedio donde el medio de transmisión es el aire. Se considera que el ruido que se introduce en el canal es despreciable frente al de los receptores, el cual se modela como ruido AWGN con densidad espectral de potencia constante  $G(f) = N_0/2$ . La atenuación en potencia es  $\alpha_c^a$  y  $\alpha_c^t$  [dB/m], para los cables del avión y la torre respectivamente, mientras que la atenuación en el aire (descontando la ganancia de las antenas) se modela como:  $L_{aire}(d) = L_0 + \alpha_a(d-10)$ , con  $\alpha_a = 0.75$  dB/km y  $L_0 = 70$  dB.



Si bien actualmente las razones del uso de AM son más bien históricas, hay quienes sostienen que una de las ventajas frente a otras modulaciones es la posibilidad de escuchar cuando dos aviones transmiten en forma simultánea en el mismo canal.

- (a) Siendo  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  mensajes de dos aviones distintos, se tiene una señal recibida de la forma:  $x_c(t) = A_{c_1}(1 + \mu x_1(t)) \cos(\omega_c t + \phi_1) + A_{c_2}(1 + \mu x_2(t)) \cos(\omega_c t + \phi_2)$ . Hacer el diagrama fasorial de  $x_c(t)$  y hallar la señal detectada por un demodulador sincrónico de AM cuando la fase del detector se sincroniza con la portadora de la señal 1.
- (b) A partir del resultado anterior, ¿usted cree que es posible escuchar ambos aviones simultáneamente? Justificar.

De ahora en adelante consideraremos un único avión transmitiendo a la torre, donde se utiliza un receptor basado en un detector sincrónico.

- (c) Hallar la relación señal a ruido en detección en la torre  $SNR_D(d)$ , cuando el avión se encuentra a una distancia  $d$  de la torre.
- (d) Si se modifica el sistema, llevando tanto el transmisor en el avión como el receptor en la torre de control junto a las antenas, ¿cómo queda la nueva relación señal a ruido  $SNR_D(d)$ .
- (e) Considerando el sistema de la parte anterior y asumiendo que la mínima  $SNR_D$  para tener un diálogo inteligible es de 10 dB y una altura de vuelo promedio de 10000m, calcular la mínima potencia de transmisión  $S_T$  para tener una cobertura de 50km alrededor de la torre. Para hacer el cálculo considerar los siguientes valores de los parámetros:  $\mu = 1$ ,  $S_x = 0.5$  (potencia del mensaje),  $N_0 = 10^{-13}$  W/Hz.

Para evitar fluctuaciones de volumen en el audio, se desea que la salida del sistema de detección tenga potencia constante  $S_D$ , sin importar la potencia transmitida ni la distancia entre el avión y la torre de control. Esto se logra ajustando una ganancia en potencia  $g_v$  variable en el receptor.

<sup>2</sup>Quizá sean de ayuda las fórmulas  $\cos^2 \theta = (1 + \cos(2\theta))/2$  y  $\cos^3 \theta = (3 \cos \theta + \cos(3\theta))/4$ .

- (f) Hallar el valor de la ganancia  $g_v$  necesaria en función de los parámetros del sistema. ¿Cómo estimaría su valor en la práctica?

### Problema 3 [10 pts.]

Se quiere transmitir una secuencia binaria  $x[k]$  donde los 0 tienen probabilidad  $p$  y se les asigna el valor 0 y los 1 tienen probabilidad  $(1-p)$  y se les asigna el valor A, y son independientes entre sí. La secuencia se quiere transmitir a una tasa  $r$  [bits/s]. Para la conformación se utiliza un pulso rectangular de ancho el tiempo de símbolo y altura 1.

- (a) ¿Qué desventajas tiene este código?
- (b) Hallar la autocorrelación de la secuencia de símbolos.
- (c) Hallar la densidad espectral de potencia de la señal PAM y bosquejarla.
- (d) Si el ancho de banda disponible es de 3400Hz, cuál es la máxima tasa de símbolos? Explicar el criterio utilizado.
- (e) Comente qué sucede a medida que  $p$  se acerca a sus valores extremos, tanto desde el punto de vista de las trayectorias en el tiempo como de su densidad espectral de potencia. ¿Afecta este comportamiento su respuesta en el punto anterior? Explique cualitativamente.

# Solución

## Problema 1

(a) Ver teórico, pero básicamente la entrada sería  $x(t)$  (el programa radial), el filtro pre-énfasis, un modulador FM (que genera  $A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\tau) d\tau)$  y puede incluir un limitador en su entrada), el canal que atenúa  $L(d)$  y luego agrega ruido con potencia total  $(N_0 + N_A)/2$  (al no ser correlacionados), un filtro pasabanda de ancho  $B_T = 2W(D + 2)$  (con  $W = 15000$  y  $D = f_\Delta/W$ ) y centrado en  $f_c$ , el detector (que por ejemplo puede bajar la señal a bandabase y derivar la fase), el filtro de de-énfasis (cuya respuesta puede ser  $1/H_{pre}(f)$ ) y luego un filtro pasabajo de ancho  $W$ .

(b) Para que el sistema esté en su régimen lineal (es decir, la salida del detector sea aproximadamente igual al mensaje más un cierto ruido), debe cumplirse que  $A_c/\sqrt{L(d)} \gg \sqrt{\eta_i(t)^2 + \eta_q(t)^2}$  (con  $\eta_i(t)$  y  $\eta_q(t)$  los componentes en fase y cuadratura del ruido pasabanda). En caso contrario, comienza a notarse un ruido no blanco que hace que el sonido sea muy malo en comparación con el régimen lineal. Por lo tanto, el alcance se puede fijar cómo aquella distancia a partir de la cual el sistema comienza a funcionar fuera de su régimen lineal.

Aquí es donde hay que tomar algún criterio, por ejemplo, que  $P(A_c/\sqrt{L(d)} < \sqrt{\eta_i(t)^2 + \eta_q(t)^2}) = 0.01$  o un número pequeño (o sea, que el ruido sea casi siempre más chico que  $A_c$ ). La distribución de este radio se probó en el teórico (pero es fácil de ver pues las variables son normales de varianza  $\sigma^2 = (N_0 + N_A)B_T$ , media cero e independientes) que es de Rayleigh de parámetro  $\sigma$ . En ese caso, se prueba que la condición anterior es equivalente a  $SNR_R = A_c^2/(2B_T(N_0 + N_A)L(d)) > 10$  (o un número aproximado según el criterio usado, pero de aquí en más usaremos 10).

(c) Como dijimos en la parte anterior,  $SNR_R > 10$  a 20 km de distancia. Entonces

$$SNR_R = \frac{S_T}{L(d)B_T(N_0 + N_A)} > 10. \quad (3)$$

Ahora bien,  $B_T = B_T(f_\Delta) = 2W(D + 2)$  (con  $D = f_\Delta/W$ ) y  $L(d)$  está especificado (y en este caso es igual a  $L(20000) \sim 6.24 \times 10^5$ ). Por lo tanto el único punto a discutir aquí es el valor de  $f_\Delta$ . Llegamos entonces a la siguiente condición:

$$S_T > 10B_T(f_\Delta)6.24 \times 10^5 \cdot 10^{-9} \quad (4)$$

lo que para los dos posibles valores de  $f_\Delta$  se traduce en

$$S_T > 1311 W (f_\Delta = 75000); S_T > 999 W (f_\Delta = 50000). \quad (5)$$

No debería hacer falta verificar con cuentas que cuanto mayor el  $f_\Delta$  mayor es la potencia necesaria para hacer que el sistema funcione en su régimen lineal. Esto es claro en la condición inicial sobre  $A_c/\sqrt{L(d)}$  y el ruido: cuanto mayor el ancho de banda que uso (lo que está implicado en aumentar  $f_\Delta$ ), mayor la potencia del ruido, mientras que  $A_c$  es fijo y lo determina la potencia de transmisión.

(d) El gasto de operación es básicamente la potencia usada en transmisión, lo que ya se cuantificó en la parte anterior (otros gastos como alquiler de la torre, personal, etc. no forman parte de este cálculo y se considera que el operador ya los conoce). Por lo tanto la primer recomendación es usar  $f_\Delta = 50000$  (un poco “sorprendente” pues no es la norma usada en casi todo el mundo).

Una vez fijado ese parámetro resta maximizar la calidad del audio en las radios receptoras. Esto es simplemente el SNR en detección, lo que pasamos a calcular. En el teórico se probó que siempre que el sistema esté en su régimen lineal la señal luego del detector FM se puede escribir como

$$Y(t) = X_{pre}(t) + \dot{\eta}_i(t)\sqrt{L(d)}/(2\pi f_\Delta A_c), \quad (6)$$

donde  $X_{pre}(t)$  es el mensaje pasado por el filtro de pre-énfasis. Como derivar es pasar por un filtro de función de transferencia  $H(f) = 2\pi j f$ , la densidad espectral del ruido a la salida del filtro de de-énfasis es (donde aquí usamos que el filtro de de-énfasis es el inverso del de pre-énfasis, al menos en la banda de interés)

$$S_{\eta_D}(f) = \frac{N_A f^2}{A_c^2 f_\Delta^2} \frac{L(d)}{1 + (2\pi f \tau)^2}, \quad (7)$$

donde aproximamos  $N_0+N_A$  por  $N_A$  por los valores de la letra (de todos modos el cálculo es prácticamente igual sin esta aproximación). En todo caso, la potencia del ruido luego del filtro pasabajo de ancho  $W$  resulta entonces aproximadamente:

$$N_D = \frac{N_A L(d)}{A_c^2 f_\Delta^2} \frac{2W}{(2\pi\tau)^2}, \quad (8)$$

lo que surge de hacer la integral de  $S_{\eta_D}(f)$  entre  $-W$  y  $W$ , y tomando en cuenta que en todos los casos  $W\tau \ll 1$  (de todos modos el resultado final es prácticamente idéntico). Por lo tanto la SNR en detección resulta

$$SNR_D = S_X \frac{A_c^2 f_\Delta^2 (2\pi\tau)^2}{N_A 2WL(d)}. \quad (9)$$

Por lo tanto hay que elegir el filtro con mayor  $\tau$ , en este caso  $\tau = 75 \times 10^{-6}$ . En este caso, y tomando  $d = 20000$  m resulta  $SNR_D = 66600$  o  $SNR_D = 48$  dB. Como es usual en los sistemas WBFM, se escucha muy bien hasta que el sistema pasa al régimen no-lineal y empieza a escucharse muy mal.

(e) Ante una entrada modulada en FM (que escribiremos como  $\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$  para minimizar la notación) la salida del amplificador será entonces  $A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) + a_2(1 + \cos(4\pi f_c t + 2\phi(t)))/2 + a_3(3 \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) + \cos(6\pi f_c t + 3\phi(t)))/4$ . Por lo tanto en  $f_c$  tenemos la señal deseada amplificada por  $A_c + 3a_3/4$ , mientras que las otras componentes quedan en bandabase o múltiplos de  $f_c$ . Un simple pasabanda (algo que seguramente ya estaba previsto) es suficiente para que la señal de salida sea prácticamente idéntica a la deseada, por lo que en recepción no tiene ningún efecto.

## Problema 2

(a) Al estar la fase sincronizada con la señal 1, ésta se detecta en forma correcta, mientras que para la señal 2, aparece un término de atenuación que corresponde justamente al coseno del desfase:

$$x_d(t) = A_{c_1} x_1(t) + A_{c_2} x_2(t) \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (10)$$

El diagrama fasorial es simplemente un fasor para la señal 1 alineada con el eje x y desfasado  $\phi_2 - \phi_1$  aparece la señal 2.

(b) En cualquier caso sería posible escuchar a la señal 2, aunque sea atenuada, salvo en el caso límite de que el desfase entre las portadoras de señales recibidas sea exactamente  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ .

(c)

$$S_D(d) = S_D^t(d) = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{L(d)} = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{(l^a \alpha_c^a + l^t \alpha_c^t + L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10))}$$

$$N_D(d) = N_D^t(d) = N_0 B_T$$

$$SNR_D(d) = SNR_D^t(d) = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{N_0 B_T (l^a \alpha_c^a + l^t \alpha_c^t + L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10))}$$

(d) El ruido no cambia, ya que se introduce únicamente en recepción. Lo que varía es la atenuación, donde ahora solo queda el término correspondiente a la atenuación en el aire.

$$SNR_D(d) = SNR_D^t(d) = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{N_0 B_T (L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10))}$$

(e) Para calcular la potencia de transmisión, el parámetro que debemos hallar es  $A_c$ , ya que para AM la potencia de transmisión es:

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} (1 + \mu^2 S_x)$$

A partir de las expresiones calculadas anteriormente, despejamos  $A_c$ :

$$A_c^2 = \frac{N_0 (L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10)) B_T SNR_D^{\min}}{\mu^2 S_x}$$

Sustituyendo con los valores de  $SNR_D^{\min} = 10$  dB y  $d = \sqrt{50^2 + 10^2}$  se obtiene el valor de  $A_c$ . De esa forma llegamos a una potencia  $S_T = 712$  W.

(f) La señal luego de la detección tiene la siguiente expresión:

$$x_R(t) = A_c \sqrt{\frac{g_v}{L(d)}} \mu x(t) + \sqrt{g_v} \eta_i(t)$$

y por lo tanto la potencia total será

$$S_R = \frac{A_c^2 g_v \mu^2 S_x}{L(d)} + g_v W N_0, \quad (11)$$

la cual debe ser igualada a  $S_D$ . Por lo tanto la ganancia del sistema de detección debe ser

$$g_v = \frac{S_D L(d)}{A_c^2 g_v \mu^2 S_x + L(d) g_v W N_0}. \quad (12)$$

La estimación de  $g_v$  se puede hacer midiendo la potencia de salida del sistema de detección (por ejemplo, si estuviéramos en digital, promediando muestras al cuadrado, o en analógico integrando el valor al cuadrado de la señal durante un período) y alimentando este valor al propio amplificador para que aumente o disminuya su valor en función de si está por debajo o por arriba de  $S_D$ . La convergencia de estos sistemas son tema de estudio de la teoría de control.

### Problema 3

(a) El código es el unipolar.

Desventajas: Necesita sincronismo con el receptor, tiene componente en continua que desperdicia potencia. Se podría decir que el pulso elegido tiene ancho de banda infinito, pero eso es una desventaja del pulso y no del código.

(b)

$$R_X[k] = \begin{cases} (1-p)A^2 & \text{si } k=0 \\ (1-p)^2 A^2 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

(c)

$$G(f) = A^2 p(1-p) \frac{1}{r} |\text{sinc}(f/r)|^2 + (1-p)^2 A^2 \delta(f). \quad (14)$$

(d) Si se toma como que la mayor cantidad de energía se envía en el lóbulo principal del sinc, el ancho banda necesario será el primer cruce por 0 del  $\text{sinc}(f/r)$ , esto se da en  $r$ . Por lo tanto la máxima tasa son 3400 simb/s.

(e) A medida que  $p$  se acerca a 1, se comienzan a enviar en su mayoría 0's. Como éstos se codifican como 0, esto se traduce en trayectorias que casi siempre son 0, y una densidad espectral de potencia baja (en la fórmula se puede ver cómo la delta disminuye como  $(1-p)^2$  y el sinc como  $(1-p)$ ). Al contrario, cuando  $p$  va hacia 0, la señal es casi siempre  $A$ , es decir prácticamente una continua. En este caso, la densidad espectral de potencia es prácticamente la delta, pues el sinc también decrece como  $p$ .

No obstante lo anterior, y a pesar de que en ambos casos disminuye el tamaño del sinc, sigue siendo necesario respetar el ancho de banda usado en la parte anterior. Si se llegara a aumentar la tasa de símbolos, y por poner un ejemplo con  $p$  tendiendo a 1, las pocas veces que se envía un 1 ( $A$  en la forma de onda) el ancho de banda de 3400 Hz será demasiado pequeño y la forma de onda no llegará a converger durante el tiempo de símbolo. Es decir, aunque la energía total baje, el ancho de banda donde la señal es significativa sigue siendo el mismo.

En este caso el problema es que se está usando una codificación de fuente poco eficiente y el stream de 0s y 1s podría haber sido comprimido antes de ser enviado si se quisieran aprovechar al máximo los 3400 Hz disponibles, pero eso es un tema para el segundo parcial.