Sistemas de Comunicación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

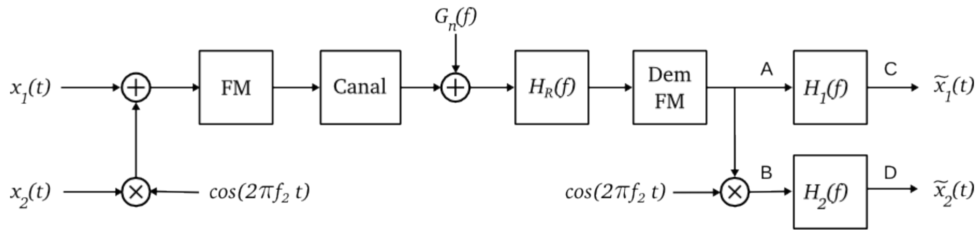
6 de mayo de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, de ancho de banda W_x y potencia S_x se transmiten con el sistema de la siguiente figura. El modulador de FM tiene desviación en frecuencia f_Δ, portadora f_c en el rango de FM comercial



y una potencia transmitida S_T. El canal cumple con las hipótesis usuales con una atenuación L y ruido AWGN con densidad espectral de potencia $G_n(f) = \eta/2$.

(a) Diseñar los filtro $H_1(f)$ y $H_2(f)$ y la mínima frecuencia f_2 que permiten recuperar ambos mensajes. Justificar cada una de las decisiones.

De aquí en más se trabajará con f_2 mínima.

(b) Caracterizar el ruido (distribución y momentos principales) y bosquejar su densidad espectral de potencia en los puntos A, B, C y D.

(c) Hallar expresiones para las relaciones señal a ruido a la salida correspondientes a cada uno de los mensajes (SNR_{D1} y SNR_{D2}).

(d) ¿Qué sucede si el oscilador utilizado en el receptor tiene un desfasaje θ respecto a la fase del oscilador utilizado en el trasmisor? ¿Existe algún θ crítico?

Se modifica el sistema anterior utilizando filtros de pre/de-énfasis únicamente para la señal $x_2(t)$.

(e) Indicar para qué se colocan y dónde se ubican en el diagrama dichos filtros.

Problema 2 [20 pts.]

Se transmite una señal modulada en AM, $x_c(t)$, la cual llega con un eco interferente aditivo de menor amplitud, $x_I(t) = \alpha\, x_c(t - t_d)$ donde $0 < \alpha \ll 1$. Conocido experimentalmente el tiempo de eco t_d se elige la frecuencia de la portadora ω_c de forma que se cumpla $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$.
Se analizarán dos sistemas de demodulación de forma que la señal interferente afecte lo menos posible.

(a) Dar un diagrama de bloques de un detector sincrónico.

(b) Estimar el error cometido al demodular con un detector sincrónico en función de α y los demás parámetros del problema.

(c) Dar un diagrama de bloques de un detector de envolvente.

(d) Estimar el error cometido al demodular con un detector de envolvente en función de α y los demás parámetros del problema.

(e) Elegir el sistema demodulador que cometa el menor error posible respecto a lo que cada uno de ellos detectaría en ausencia de eco.

Nota: Puede resultar útil el desarrollo, $\sqrt{1+x} \simeq (1 + \frac{1}{2}\, x)$ con $|x| \ll 1$

Problema 3 [10 pts.]

Se desea transmitir una señal digital binaria con

$$a_0 p_0(t) = -A\Pi(t/T) \quad y \quad a_1 p_1(t) = \sqrt{3}A\Lambda(2t/T)$$

Supondremos símbolos equiprobables e independientes y un canal de atenuación L y ruido AWGN con densidad espectral de potencia $\eta/2$.

(a) Dar una diagrama de bloques del receptor.

(b) Diseñar el filtro de recepción para que la probabilidad de error P_e sea mínima. Esbozar su respuesta al impulso.

(c) Si ahora tenemos $a_1 p_1(t) = A\Pi(t/T)$, diseñar el nuevo filtro de recepción y esbozar su respuesta al impulso. La probabilidad ¿mejora o empeora? Justificar.

(d) Para este último caso, esbozar la densidad espectral de potencia de la señal transmitida. Justificar.

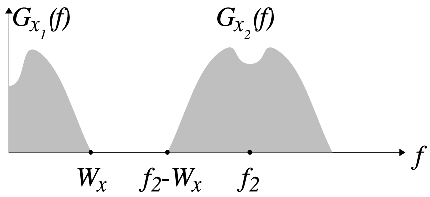
Solución

Problema 1

(a) La señal luego del sumador tiene una expresión como la siguiente

$$x_1(t) + x_2(t)\cos(2\pi f_2 t)$$

El espectro de esta señal, antes de ser modulada en FM es como el de la figura



Para que ambas señales puedan ser recuperadas no debe haber solapamiento. Esta condición se refleja en que $f_2 - W_x \geq W_x$, por lo tanto

$$f_2 \geq 2 \times W_x = 30 \text{ kHz}$$

En la recepción, luego la detección de la señal FM, la expresión de la señal detectada es

$$f_\Delta x_1(t) + f_\Delta x_2(t)\cos(2\pi f_2 t)$$

cuyo espectro es similar al de la figura anterior. Filtrando pasabajos con ancho de banda W_x recuperamos la señal $x_1(t)$ (amplificada por el f_Δ de la modulación FM). La detección simcrónica que realiza el producto por $2\cos(2\pi f_2 t)$ deja la expresión de la señal luego antes del filtro $H_2(f)$ como

$$2f_\Delta x_1(t)\cos(2\pi f_2 t) + 2f_\Delta x_2(t)\cos^2(2\pi f_2 t) =$$

$$2f_\Delta x_1(t)\cos(2\pi f_2 t) + f_\Delta x_2(t)(1 + \cos^2(4\pi f_2 t))$$

El espectro de $x_1(t)$ queda en la banda centrada en f_2. Mientras tanto el espectro de $x_2(t)$ queda en bandabase y en la banda de $2f_2$. Filtrando pasabajos con ancho de banda W_x recuperamos la señal $x_2(t)$. Ambos filtros son pasabajos de ancho de banda W_x.

(b)

(c) Antes que nada se debe verificar que en las condiciones planteadas se cumple con el umbral FM. Esto implica verificar que

$$SNR_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \geq SNR_{R_{th}} = 10$$

donde B_T es el ancho de banda de la señal FM, cuya estimación es

$$B_T = 2(D+2)(f_2 + W_x)$$

dado que el ancho de banda de la señal modulada en FM es$f_2 + W_x$ y

$$D = \frac{f_\Delta}{(f_2 + W_x)}$$

Sustituyendo por los valores numéricos

$$SNR_R = \frac{10^4}{2 \times 10^{-7} \times 10^4 \times 2(\frac{75}{30+15} + 2)(30+15)} = 15 \geq SNR_{R_{th}} = 10$$

El ruido que se agrega en el canal queda, luego del detector, con un espectro parabólico con una densidad espectral de potencia

$$G_\xi(f) = \frac{\eta f^2}{2S_R}\Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$$

La potencia de la señal en detección en el primer canal es $S_{x_1} = f_\Delta^2 S_x$. La potencia del ruido corresponde a la integral de $G_\xi(f)$ en la banda pasante de $H_1(f)$

$$N_{R_1} = \int_{-W_x}^{W_x} G_\xi(f)\ \mathrm{d}f = \frac{\eta W_x^3}{3S_R}$$

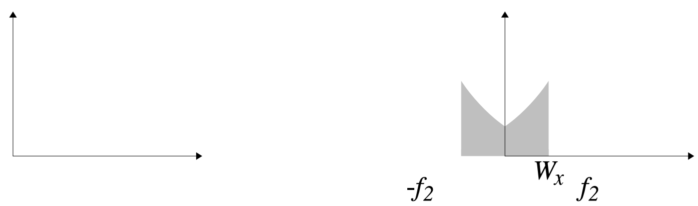
Por lo tanto la

$$SNR_{D_1} = \frac{S_{x_1}}{N_{R_1}} = \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta L W_x^3}$$

La potencia de la señal en detección en el segundo canal es $S_{x_2} = f_\Delta^2 S_x$. El ruido parabólico también es modulado por el detector sincrónico, su expresión es

$$G_{D_2}(f) = G_\xi(f - f_2) + G_\xi(f + f_2)$$

centrando el espectro en $\pm f_2$ como en la siguiente figura



La potencia del ruido detectado corresponde a la integral de $G_{D_2}(f)$ en la banda pasante de $H_2(f)$ que puede escribirse como

$$N_{R_2} = \int_{-W_x}^{+W_x} G_{D_2}(f)\ \mathrm{d}f = 2\int_{f_2 - W_x}^{f_2 + W_x} G_\xi(f)\ \mathrm{d}f = \frac{\eta W_x}{3S_R}(2W_x^2 + 3f_2^2)$$

Por lo tanto la

$$SNR_{D_2} = \frac{S_{x_2}}{N_{R_2}} = \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta L W_x (2W_x^2 + 3f_2^2)}$$

(d) El tono utilizado en la recepción es

$$2\ \cos(2\pi f_2 t + \theta)$$

Por lo tanto la señal luego del detector sincrónico queda

$$2f_\Delta x_2(t)\cos(2\pi f_2 t)\cos(2\pi f_2 t + \theta) = f_\Delta x_2(t)(\cos\theta + \cos(4\pi f_2 t + \theta))$$

que luego del filtro pasabajos queda

$$\tilde{x}_2(t) = f_\Delta x_2(t)\cos\theta + \xi(t)\cos(2\pi f_2 t + \theta)$$

donde el segundo término de la suma es el ruido.
En este caso la potencia del ruido no cambia, sin embargo sí lo hace la potencia de la señal; queda

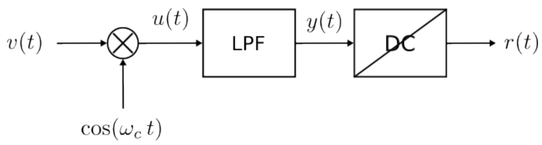
$$S_{x_2} = f_\Delta^2 S_x \cos^2\theta$$

Por lo tanto la SNR_D queda similar a hallada en la parte anterior multiplicada por $\cos^2\theta \leq 1$. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ no se detecta señal en el segundo canal.
Se podría utilizar un PLL para demodular y sincronizarse con la portadora (PLL de Costas).

(e) El filtro de pre-énfasis se coloca en el transmisor entre el multiplicador y el sumador. El filtro de de-énfasis se coloca en el receptor antes del multiplicador.
La función de dichos filtros es hacer que el ruido sea uniforme en todas las frecuencias del mensaje (a diferencia del ruido parabólico que presenta mayor potencia de ruido a frecuencias más altas).

Problema 2

(a)



(b) En el detector sincrónico

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(\omega_c(t - t_d))$$

por lo tanto

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(2\omega_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))\big[\cos(2\omega_c t - \omega_c t_d) + \cos(\omega_c t_d)\big]$$

ahora usando que se eligió ω_c para que $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$ obtenemos que

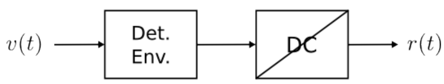
$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(2\omega_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d)) \sin(2\omega_c t)$$

y luego filtrando obtenemos que $y(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))$, eliminando el termino de continua obtenemos

$$r(t) = \frac{A_c}{2}\mu x(t)$$

o sea que no hay error.

(c) Ahora veamos en el caso de un detector de envolvente



(d)

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(\omega_c(t - t_d))$$

luego al pasarla por el detector de envolvente tenemos que

$$A_v(t) = A_c\sqrt{(1 + \mu x(t))^2 + \alpha^2 \left(1 + \mu x(t - t_d)\right)^2}$$

Haciendo ahora un desarrollo de primer orden de esta expresión con respecto al parámetro α obtenemos que

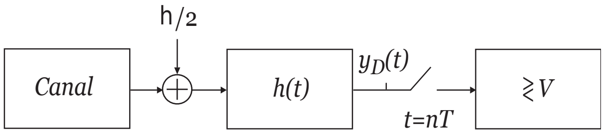
$$A_v(t) = A_c(1 + \mu x(t))\sqrt{1 + \alpha^2 \left(\frac{1 + \mu x(t - t_d)}{1 + \mu x(t)}\right)^2} \approx A_c(1 + \mu x(t)) \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{1 + \mu x(t - t_d)}{1 + \mu x(t)}\right)^2\right]$$

y después de eliminar el termino de continua obtenemos $r(t) \approx A_c\mu\, x(t) + \alpha^2\Big(z(t) - \big\langle z(t)\big\rangle\Big)$ donde $z(t) = \frac{A_c}{2}\frac{(1+\mu x(t-t_d))^2}{1+\mu x(t)}$.

(e) Elegimos el detector sincrónico pués es el que no presenta error en la recuperación del mensaje $x(t)$.

Problema 3

(a)



(b) El filtro apareado obtiene la menor P_e, entonces

$$h_{opt}(t) = \frac{2}{\eta}kd(t_k - t) = \frac{2}{\eta}k(a_1 p_1(t_k - t) - a_0 p_0(t_k - t)) = \frac{2}{\eta}k\left[A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + \sqrt{3}A\Lambda\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right)\right]$$

y la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)$$

con

$$E_d = a_1^2 \int_0^T p_1(t)^2 dt + a_0^2 \int_0^T p_0(t)^2 dt - 2a_1 a_0 \int_0^T p_1(t)p_0(t)dt = A^2T + A^2T + \sqrt{3}A^2T$$

(c)

$$h_{opt}(t) = \frac{2}{\eta}kd(t_k - t) = \frac{2}{\eta}k(a_1 p_1(t_k - t) - a_0 p_0(t_k - t)) = \frac{2}{\eta}k2A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

y en este caso la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)$$

con

$$E_d = a_1^2 \int_0^T p_1(t)^2 dt + a_0^2 \int_0^T p_0(t)^2 dt - 2a_1 a_0 \int_0^T p_1(t)p_0(t)dt = A^2T + A^2T + 2A^2T$$

E_d es mayor con esta señalización por lo que la probabilidad de error disminuye.

(d)

$$G_x(f) = \sigma_a^2 T sinc(fT)^2 \quad \text{con} \quad \sigma_a^2 = A^2$$