Sistemas de Comunicación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

12 de mayo de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [pts.]

Se transmite una señal $x(t)$ de ancho de banda $W = 20\ kHz$ y potencia $S_x = 1$ utilizando modulación FM, a través de un canal que cumple las hipótesis habituales. Se conoce la atenuación y la densidad espectral de potencia del ruido introducido en el canal, $L(\lambda_1) = 10\ dB$ y $\eta(\lambda_1) = 10^{-10} \frac{watts}{Hz}$, siendo $\lambda_1 = 10\ km$. Se considera que se recibe con un receptor real, es decir que el mismo introduce ruido, de ganancia $g = L(\lambda_1)$ y densidad espectral de potencia de ruido $\eta_A = 10^{-7} \frac{watts}{Hz}$ (referida a su entrada).

(a) Se transmite con potencia de transmisión $S_T = 15\ watts$ a una distancia $\lambda_1 = 10\ km$. Hallar la máxima SNR_D, especificando el resto de los parámetros del sistema.

Se desea aumentar la SNR_D colocando un repetidor. Éste introduce un ruido de densidad espectral de potencia $\eta_A = 10^{-7} \frac{watts}{Hz}$. La ganancia del repetidor se regula de manera tal que compensa la atenuación del tramo de canal que lo precede.

(b) Indicar en qué punto del canal lo colocaría. Esbozar el análisis que lleva a elegir dicho punto.

(c) Hallar la nueva SNR_D para el diseño hecho en (b), manteniendo los parámetros del sistema hallados en la parte (a).

Se considera transmitir un nuevo mensaje $x_2(t)$ utilizando el sistema diseñado en la parte (a). La densidad espectral de potencia del mensaje es:

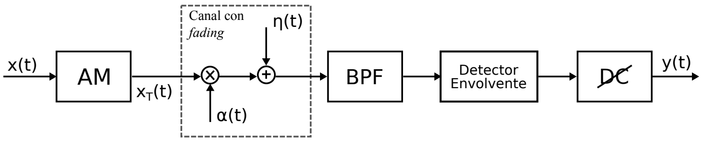
$$G_{x_2}(f) = \Lambda\Big(\frac{f - \frac{f_2+f_1}{2}}{f_2 - f_1}\Big) + \Lambda\Big(\frac{f + \frac{f_2+f_1}{2}}{f_2 - f_1}\Big)$$

(d) Si se agrega un filtro pasabanda ideal de frecuencias de corte $[f_1, f_2]$ luego de la detección de FM, halle la SNR_D en función de f_1, f_2 y de los parámetos del sistema. Explique como varía en función f_2 considerando $f_1 = W/2$ fija y $f_2 > f1$. (Esbozar una gráfica que muestre la dependencia con f_2).

Puede ser útil la siguiente ecuación: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Problema 2 [pts.]

En diversos sistemas de comunicación inalámbrica, principalmente debido a la propagación multicamino, la atenuación del canal es variable en el tiempo, lo que se conoce como *fading*. En este caso se desea transmitir una señal $x(t)$ por un canal con *fading* $\alpha(t)$. El canal introduce además, ruido aditivo gaussiano de media nula y densidad espectal de potencia $\eta/2$, con $\eta = 10^{-5}$ W/Hz. La señal $x(t)$ tiene media nula, potencia $S_x = \frac{1}{2}$ y ancho de banda $W = 10$ kHz. Se utiliza modulación AM con índice de modulación $\mu = 0.9$ y amplitud de la portadora $A_c = 10$.



Notar en la figura que el *fading* se modela con el factor $\alpha(t)$, que es multiplicativo a la señal transmitida.

Suponiendo que el canal no introduce *fading* y tiene atenuación constante (es decir $\alpha(t) = \alpha = 1$).

(a) Enunciar y justificar completamente el modelo del ruido en detección.

(b) Hallar y calcular la relación señal a ruido a la salida del receptor.

De aquí en adelante considerar que el canal sí introduce *fading* $\alpha(t)$, el cual se modela como un proceso estacionario en sentido amplio, con media $a = \frac{1}{2}$ y covarianza $C_\alpha(\tau) = R_\alpha(\tau) - a^2 = \frac{1}{4}e^{-0.001|\tau|}$, independiente de todos los otros procesos.

(c) Determinar la componente de continua a la salida del detector de envolvente.

(d) Hallar la relación señal a ruido a la salida del receptor.

Se desea agregar al sistema de recepción una amplificación variable en el tiempo $g_R(t)$ de manera de compensar el efecto del *fading*.

(e) ¿Qué parámetro de la señal recibida permite ajustar la ganancia? ¿Cómo lo implementaría?

Problema 3 [pts.]

La policía técnica estudia un caso de envenenamiento en una fiesta. Hay 129 vasos sospechosos de ser el único que contiene la bebida con veneno y se quiere determinar cuál es antes de hacer la búsqueda de huellas dactilares. Se quiere hacer la menor cantidad de pruebas posible de mezclas de los contenidos de los vasos.
Alguien sugiere la siguiente estategia: (i) primero probar un vaso cualquiera, si no contiene veneno, quedan 128 para probar; (ii) siendo el total de vasos a probar potencia de dos, dividir en dos subconjuntos iguales y evaluar la mezcla de los contenidos, (iii) seguir este procedimiento con el grupo que contiene el veneno hasta encontrar el vaso con veneno.

(a) ¿Cuál es la cantidad media de pruebas que hay que hacer para encontrar el vaso envenenado?

Hay una estrategia (óptima) que minimiza la cantidad media de pruebas a realizar.

(b) ¿Cuál es esta estrategia? Justificar.

(c) ¿Cuál es la cantidad media de pruebas que hay que hacer en este caso?

Solución

Problema 1

(a) Para tener la máxima SNR_D con S_T fija debemos trabajar justo en el umbral de FM donde se cumple:

$$SNR_R = \frac{S_T}{L(\lambda_1)[\eta(\lambda_1) + \eta_A]B_T} \approx \frac{S_T}{L(\lambda_1)\eta_A B_T} = 10$$

por lo que despejando de esta ecuación obtenemos $B_T = 1.5\ MHz$.
Asumiendo un índice de desviación $D >> 1$ se tiene

$$B_T = 2(D+1)W$$

Despejando obtenemos el valor de $D = \frac{B_T}{2W} - 1 = 36.5$. cumpliendo con la hipótesis asumida.
La SNR_D es entonces:

$$SNR_D = \frac{3D^2 S_x S_T}{\eta_A L(\lambda_1)W} = 65dB$$

(b) Se colocaría en el medio del canal puesto que maximiza la SNR_D.

(c) En este caso tenemos:

$$SNR_D = \frac{3D^2 S_x S_T}{2\eta_A L(\lambda_1/2)W}$$

donde

$$L(\lambda_1/2) = L^{1/2} = \sqrt{10}$$

Sustituyendo se obtiene $SNR_D = 67dB$.

(d) La potencia de la señal en detección es:

$$S_D = f_\Delta^2(f_2 - f_1)$$

y el ruido:

$$N_D = 2\int_{f_1}^{f_2} \frac{\eta_A L(\lambda_1)}{2S_T} f^2 df = \frac{\eta_A L(\lambda_1)}{3S_T}(f_2^3 - f_1^3)$$

entonces,

$$SNR_D = \frac{3f_\Delta^2(f_2 - f_1)S_T}{L(\lambda_1)\eta_A(f_2^3 - f_1^3)}$$

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) Señal transmitida:

$$x_T(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(w_c t + \phi)$$

Señal recibida:

$$x_R(t) = x_T(t) + \eta(t)$$

Potencia de la señal recibida: $E\{x_R^2(t)\} = \frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)}{2} + \eta B$. Por ser x, ϕ y η independientes y $E\{x(t)\} = E\{\eta(t)\} = 0$.

$$SNR_R = \frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)/2}{\eta 2W} = \frac{10^2(1 + 0.9^2\frac{1}{2})/2}{10^{-5}2 10^4} = 25db.$$

Se está por arriba del umbral, por lo que la señal detectada es: $y(t) = A_c\mu x(t) + \eta_i(t)$. Al ser x y η_i independientes y $E\{x(t)\} = 0$. La potencia de $y(t)$ es $E\{y^2(t)\} = A_c^2\mu^2 S_x + \eta B$.

$$SNR_D = \frac{A_c^2\mu^2 S_x}{\eta 2W} = \frac{10^2 0.9^2\frac{1}{2}}{10^{-5}2 10^4} = 23db.$$

(c) Señal recibida:

$$x_R(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(w_c t + \phi)\alpha(t) + \eta(t).$$

Al ser x, ϕ, α y η independientes y $E\{x(t)\} = E\{\eta(t)\} = 0$, la potencia recibida:

$$P_{x_R} = \underbrace{\frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)R_\alpha(0)}{2}}_{señal+portadora} + \underbrace{\eta B}_{ruido}$$

$$SNR_R = \frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)R_\alpha(0)/2}{\eta 2W} = \frac{10^2(1+0.9^2\frac{1}{2})\frac{1}{2}/2}{10^{-5}210^4} = 22dB$$

Se está por arriba del umbral, por lo que la señal a la salida del detector de envolvente es:

$$A_c(1 + \mu x(t))\alpha(t) + \eta_i(t).$$

El valor medio es

$$A_c E\{1 + \mu x(t)\}E\{\alpha(t)\} + E\{\eta_i(t)\} = A_c E\{\alpha(t)\} = \frac{10}{2} = 5$$

(d)

$$y(t) = A_c(1 + \mu x(t))\alpha(t) + \eta_i(t) - A_c a$$

$$E\{y(t)^2\} = A_c^2(1+\mu^2 S_x)R_\alpha(0) + \eta B - A_c^2 a^2 = \underbrace{A_c^2\mu^2 S_x R_\alpha(0)}_{señal} + \underbrace{\eta B + A_c^2(R_\alpha(0) - a^2)}_{noseñal}$$

$$SNR_D = \frac{A_c^2\mu^2 S_x R_\alpha(0)}{\eta B + \frac{A_c^2}{4}} = \frac{10^2 0.9^2\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{10^{-5}210^4 + 10^2/4} = -0.95dB.$$

(e) La estimación de la ganancia se podría hacer directamente a partir de la potencia instantánea de la portadora a la entrada del receptor que es

$$Pot_{\text{inst}}(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} A_c^2\alpha^2(s)\cos(\omega_c s)\mathrm{d}s \approx \frac{A_c^2\alpha^2(t)}{4}$$

En la práctica se ajusta la ganancia realimentando el valor de la portadora a la salida del receptor. Esto es lo que se llama control automático de volumen. Si se desea que la amplitud de la señal sea constante A_I entonces

$$g_{FI} = \frac{A_I^2}{Pot_{\text{inst}}\mu^2}.$$

Problema 3

(a) Si la cantidad de vasos fuera 128, que es potencia de dos, la estrategia óptima consistiría en dividir recursivamente el conjunto de candidatos en mitades, lo cual llevaría a probar 7 mezclas en total (cualquiera sea el vaso con veneno). La propuesta podría estar inspirada en la idea (equivocada) de que la mejor estrategia consiste en descartar un vaso cualquiera, de modo de quedarse con 128 candidatos, y aplicar la estrategia óptima para 128 vasos en el conjunto restante.
La cantidad de pruebas será 1 con probabilidad 1/129 y, con probabilidad 128/129, 1 más la cantidad de pruebas necesarias para distinguir entre 128 vasos. En el mejor de los casos, si se usa una estrategia óptima para distinguir entre 128 vasos, la cantidad media de pruebas será

$$L_1 = \frac{1}{129}\times 1 + \frac{128}{129}\times 8 \approx 8$$

(b) La mejor estrategia se obtiene construyendo un árbol de decisión aplicando el algoritmo de Huffman (pensando en cada vaso candidato como un elemento de un alfabeto al que hay que asignarle una palabra de código). En el caso de 129 elementos equiprobables, un código óptimo consiste de 127 palabras de largo 7 y 2 palabras de largo 8.

(c) Con esta estrategia, la cantidad media de pruebas es

$$L_{opt} = \frac{127}{129} \times 7 + \frac{2}{129} \times 8 \approx 7\,.$$