Sistemas de Comunicación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Mayo de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [14 pts.]

Ante la eventualidad de la realización de llamados para la asignación de frecuencias de radiodifusión en Punta del Diablo, un interesado quiere evaluar los requerimientos técnicos necesarios de un canal de AM y uno de FM. La señal a trasmitir se supone que tiene $W = 5$ kHz de ancho de banda y potencia $S_x = \frac{1}{2}$. La portadora de AM disponible es 1050 kHz y el indice de modulación a utilizar es $\mu = 1$. En el caso de FM, supondremos que se trasmite FM estéreo con una frecuencia portadora de 94.7 kHz y $D = 5$.
Se introduce en recepción un ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta = 10^{-7}$ W/Hz. Supondremos que por restricciones regulatorias la máxima potencia transmitida en el caso de AM debe ser 50 kW y en el caso de FM debe ser de 1 kW.

(a) Determinar el ancho de banda de transmisión en cada caso.

Asumiendo un modelo simplificado de la atenuación dado por $L(d) = L_0 \left(\frac{d}{d_0}\right)^2$, donde L_0^{AM} es tal que a $d = 300$ km la $\mathrm{SNR}_D = 30$ dB, y L_0^{FM} es tal que $d = 250$ km se alcanza el límite de detección.

(b) Hallar la máxima distancia que se puede alcanzar en cada caso para obtener una relación señal a ruido detectada superior a 50 dB.

(c) Determinar cuál sería la modulación más adecuada para alcanzar la capital departamental (Ciudad de Rocha a 100 km) si se dispone de la posibilidad de usar un repetidor. Dónde lo colocaría? Justificar.

Problema 2 [10 pts.]

Alicia tira dos dados no cargados de cuatro caras (con números 1, 2, 3 y 4) y anota la suma de los números elegidos. Federico tiene que hallar este número, pero solamente puede hacer preguntas cuya respuesta sea si/no.

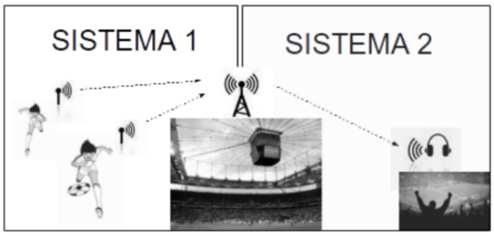
(a) Hallar la probabiblidad de cada uno de los posibles resultados.

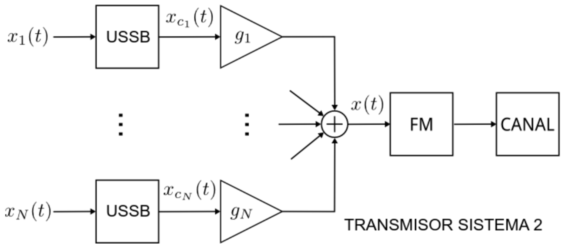
(b) Calcular la información media de esta fuente.

(c) Detallar completamente una estrategia de preguntas (si/no) que requiera (en promedio) la menor cantidad de preguntas.

Problema 3 [18 pts.]

Usted, contratado por la empresa Skyblue Duck Corporation, deberá trabajar en el diseño de un novedoso sistema para Brasil 2014. Este sistema le permite al espectador en el estadio escuchar el audio de algunos jugadores, los DTs y suplentes, generando la sensación de estar dentro de la cancha. El sistema se divide en dos partes, el Sistema 1 que comunica el audio de los jugadores a un equipo central y luego un Sistema 2 (a diseñar) con la comunicación entre el equipo central y los espectadores.





Las señales $x_i(t)$, correspondientes a los mensajes de audio, se consideran independientes, de ancho de banda W y potencia media P_x, y se transmiten multiplexados en frecuencia. Se modulan en USSB sobre subportadoras $f_{c_i} = (i-1)W$ con $i = 1, \ldots, N$, todas con igual potencia S_{USSB}. Luego la suma de todas ellas se modula en frecuencia con portadora $f_c \gg NW$, constante de desviación de frecuencia f_Δ y potencia de transmisión S_T. El canal tiene una atenuación en potencia L en el peor caso. A la entrada de cada receptor se introduce ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta$. Las ganancias en potencia g_i deben cumplir $S_{\text{USSB}} \sum_i g_i = S_x$, donde $x(t)$ es la señal antes del modulador FM.

(a) Dar el diagrama de bloques de un receptor.

(b) Hallar la expresión del número máximo de canales $N_{\text{máx}}$ que se puede transmitir si se requiere una relación señal a ruido a la salida del discriminador igual o mayor a SNR_{FM}.

(c) Calcular $N_{\text{máx}}$ para los valores de los parámetros indicados al final del problema. Hallar el ancho de banda utilizado en la transmisión en este caso.

(d) Bosquejar la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del demodulador FM.

(e) Hallar la SNR_D^i para cada señal $x_i(t)$. Verificar que el resultado es de la forma: $\text{SNR}_D^i = \frac{K g_i}{i^3 - (i-1)^3}$ siendo K una constante que depende de los parámetros fijos del sistema.

(f) Hallar las ganancias g_i si se eligen todas iguales. Hallar la relación entre la máxima y la mínima SNR_D^i para este caso.

(g) Hallar las ganancias g_i para que la SNR_D^i sea la misma para cada señal $x_i(t)$. Hallar dicha SNR_D resultante.

(h) La elección de ganancias de la parte anterior corresponde a una ecualización del sistema. ¿De qué otra forma se podría atacar este problema? ¿Qué complejidad (y por lo tanto costo) adicional tiene esta solución?

Datos: $W = 10$ kHz, $P_x = 1$, $S_{\text{DSB}} = 400$ mW, $f_c = 450$ MHz, $f_\Delta = 150$ kHz, $S_T = 100$ W, $S_x = 1/2$, $L = 60$ dB, $\eta = 10^{-11}$ W/Hz, $\text{SNR}_{\text{FM}} = 25$ dB.

Pueden ser útiles las sumas geométricas $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

Problema 4 [8 pts.]

Una secuencia de datos binarios, independientes, con $P(1) = q$ y $P(0) = 1 - q$, se codifica en forma polar con el pulso $p(t)$. Sea $x(t)$ la señal conformada.

(a) Dar una expresión genérica para $x(t)$ y su densidad espectral de potencia $G_x(f)$.

(b) Indicar un ejemplo de pulso codificación que incluya información de sincronismo y otro que no.

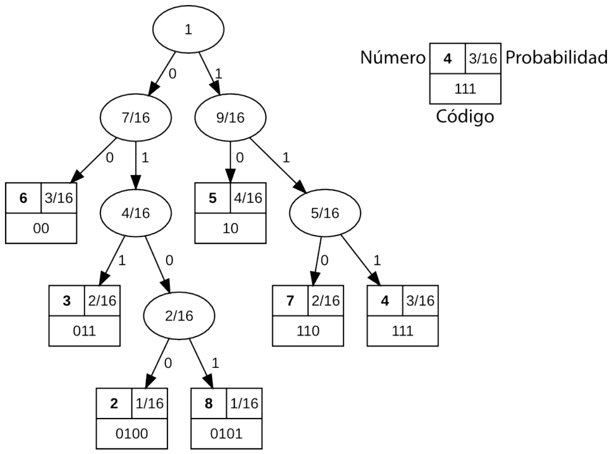


Figura 1: Árbol de Huffman para el Problema 3.

Solución

Problema 1

(a)

(b)

(c)

Problema 2

(a) Las sumas de los números en ambas caras pueden ser un entero entre 2 y 8 inclusive. Calculando las posibles combinaciones las probabilidades resultan:

s	2	3	4	5	6	7	8
$p(s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(b) Entropía.

(c) La estrategia óptima resultará de asignarle a cada posible resultado una palabra de código binario (dado que son respuestas binarias) de forma que el largo medio del código sea el más corto posible. Así determinando el código del número sorteado (preguntando por cada bit secuencialmente) se determina ese número. La pregunta i-ésima revelará el valor del bit i-ésimo.
El código de Huffman es el que produce el código de largo medio más corto posible. Calculando ese código mediante el árbol que se muestra en la figura **??** obtenemos las siguientes palabras de código.

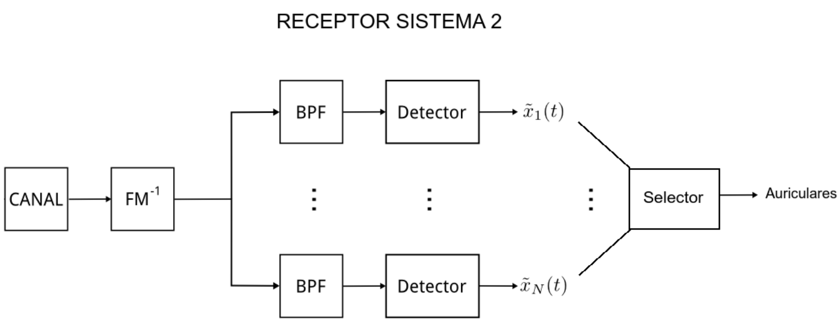
Número	Código
2	0100
3	011
4	111
5	10
6	00
7	110
8	0101

La primera pregunta define el primer bit, por lo que debe agrupar a los posibles resultados que comparten el primer bit, por ejemplo, supongamos que el número es el 2:

- Es 4, 5 o 7? (Son aquellas que tienen el primer bit igual a 1) No (Se elimina la rama derecha del árbol)
- Es 2, 3 u 8? (Son aquellas con un 0 en el primer bit y un 1 en el segundo bit) Si
- Es 3? (Primer bit en 0, segundo bit en 1, y tercer bit en 1) No
- Es 8? No $\Rightarrow$ Es 2.

Problema 3

(a)



(b) La SNR_D para nuestro transmisor FM es:

$$\text{SNR}_D = 3D^2 S_x \gamma \text{ con } \gamma = \frac{S_T}{\eta L W_x} \text{ y } W_x = NW$$

Así, tenemos que:

$$\frac{3D^2 S_x S_T}{\eta L N W} \geq \text{SNR}_{\text{FM}}$$

siendo

$$D = \frac{f_\Delta}{W_x} = \frac{f_\Delta}{NW}$$

De esta ecuación es posible despejar N:

$$N^3 \leq \frac{3 f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta L W^3 \text{SNR}_{\text{FM}}}$$

Llamemos N_1 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Todo esto es válido si estamos trabajando sobre el umbral de FM, por lo que debemos imponer esta condición:

$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \geq 10$$

donde

$$B_T = 2(D+2)NW = 2\frac{f_\Delta + 2NW}{NW}$$

De esta condición es posible despejar N:

$$N \leq \frac{S_T - 20\eta L f_\Delta}{40 \eta L W}$$

Llamemos N_2 a la parte entera del N que cumple la igualdad.

Entonces, dado que es necesario que se cumplan ambas condiciones, el máximo número de canales que se pueden transmitir queda:

$$N_{\text{máx}} = \text{mín}\{N_1, N_2\}$$

(c) El valor de D es entonces:

$$D = \frac{f_\Delta}{N_{\text{máx}} W}$$

Según el valor que tome D tenemos que el ancho de banda resulta ser:
$B_T = 2f_\Delta$ si $D \gg 1$
$B_T = 2N_{\text{máx}}W$ si $D \ll 1$
$B_T = 2(D+2)N_{\text{máx}}W$ si $D \in [1, 10]$

```
>> ((3*(150000^2)*0.5*100)/(1e-11*1e6*(10000^3)*10^2.5))^(1/3) = 10.22
```

```
>> (100-20*1e-11*1e6*150000)/(40*1e-11*1e6*10000) = 17.5
```

Tenemos que $N_1 = 10$ y $N_2 = 17$, por lo tanto el máximo es:

$$N_{\text{máx}} = 10$$

En este caso D queda:

```
>> D = 150000/(10*10000) = 1.5
```

En este caso el ancho de banda de transmisión queda:

$$B_T = 2(D+2)N_{\text{máx}}W = 700 \text{ kHz}$$

```
>>  2*(150000/(10*10000)+2)*10*10000 = 700000
```

(d) Graficar la parábola $G_n(f) = f^2 \frac{\eta L}{2S_T} \Pi(f/B_T)$.

(e) Ambas, SNR_R y SNR_D, son iguales para cada canal por ser USSB.
La potencia del ruido detectado en el canal i es:

$$N_D^i = 2\int_{(i-1)W}^{iW} \frac{\eta f^2}{2S_R} = \frac{\eta W^3}{3S_R}(i^3 - (i-1)^3)$$

La potencia de la señal detectada en el canal i es:

$$S_D^i = f_\Delta^2 g_i S_{\text{USSB}}$$

Por lo tanto:

$$SNR_R^i = \text{SNR}_D^i = \frac{3S_T f_\Delta^2 g_i S_{\text{USSB}}}{\eta L W^3 (i^3 - (i-1)^3)}$$

(f) En este caso las ganancias son todas iguales y además deben cumplir $S_{\text{USSB}} \sum_i g_i = S_x$, por lo que quedan:

$$g_i = \frac{1}{N}\frac{S_x}{S_{\text{USSB}}}$$

De esta forma la relación entre la máxima y la mínima SNR_D^i queda:

$$SNR_D^1/SNR_D^{10} = (10^3 - 9^3)/1 = 271$$

(g) Deseamos que para todo i, j se cumpla $SNR_D^i = SNR_D^j$, esto implica:

$$g_1 = \frac{g_i}{i^3 - (i-1)^3} = \frac{g_j}{j^3 - (j-1)^3}$$

Además las ganancias deben cumplir:

$$S_{\text{USSB}} \sum_i g_i = S_x$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} g_1(i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^{N} g_i = \frac{S_x}{S_{\text{USSB}}}$$

De donde podemos despejar g_1:

$$g_1 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3) = \frac{S_x}{S_{\text{USSB}}}$$

$$g_1 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3) = g_1(1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + ... + (N-1)^3 - (N-2)^3 + N^3 - (N-1)^3) = g_1 N^3$$

$$g_1 = \frac{S_x}{S_{\text{USSB}} N^3}$$

También podemos despejar g_1 utilizando las fórmulas de las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} (3i^2 - 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{N} i^2 - 3\sum_{i=1}^{N} i + N = 3\frac{N(N+1)}{2} - 3\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + N = N^3$$

De esta forma se calcula g_i para un i genérico:

$$g_i = \frac{S_x(i^3 - (i-1)^3)}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

Entonces la relación señal a ruido es la misma para cada canal y queda:

$$\text{SNR}_D^i = \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 W^3}$$

(h) La opción alternativa al uso de ganancias ajustadas que se plantea, es la introducción de filtros de preénfasis y deénfasis. De esa forma es posible ecualizar el sistema, de manera de lograr la misma relación señal a ruido en cada canal, pero esto implica que cada receptor debe contar con dicho filtro, encareciendo de esa forma la solución.