

Sistemas de Comunicación

Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

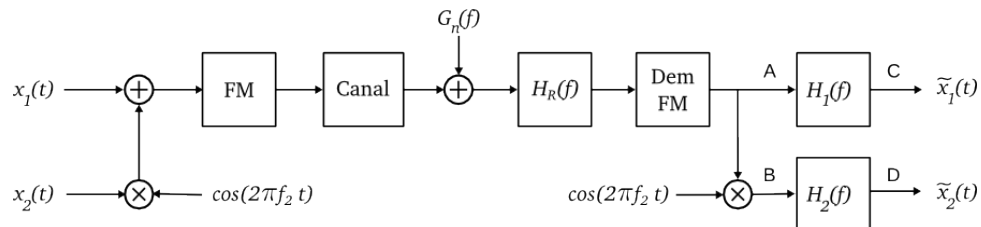
Lunes 13 de mayo de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

Se utiliza un sistema de FM para transmitir dos mensajes de audio, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, según la figura. Las señales tienen un ancho de banda $W_x = 15$ kHz y una potencia $S_x = 1/2$. El modulador FM tiene un $f_\Delta = 75$ kHz, la portadora f_c en el rango de FM comercial y una potencia transmitida $S_T = 10$ kW. El canal cumple con las hipótesis usuales con una atenuación $L = 40$ dB y ruido AWGN con densidad espectral de potencia $G_n(f) = \eta/2$ con $\eta = 2 \times 10^{-7}$ W/Hz.



- (a) Explicar el funcionamiento del sistema y hallar la mínima frecuencia f_2 que permite recuperar ambos mensajes. Especificar las características de los filtros $H_1(f)$ y $H_2(f)$.

De aquí en más se trabajará con f_2 mínima.

- (b) Caracterizar el ruido y bosquejar su densidad espectral de potencia en los puntos A, B, C y D.
- (c) Calcular las relaciones señal a ruido a la salida correspondientes a cada uno de los mensajes (SNR_{D1} y SNR_{D2}).
- (d) ¿Qué sucede si el tono utilizado en el receptor tiene un desfase θ ? ¿Existe algún θ crítico? ¿Cómo podría sincronizarse?

Se modifica el sistema anterior utilizando filtros de pre/de-énfasis únicamente para la señal $x_2(t)$.

- (e) Indicar para qué se colocan y dónde se ubican en el diagrama dichos filtros.

Problema 2 [12 pts.]

El “tiro desde los once pasos” es la pena máxima en el fútbol; se desea analizar con herramientas de teoría de la información las opciones del guardameta. El arco de fútbol se divide en cinco zonas $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ hacia donde el golero puede arrojar. Según el perfil del ejecutante (zurdo o diestro), el arquero tiene una distribución de probabilidad $p_I(Z)$ o $p_D(Z)$ de las zonas como se muestra en la siguiente figura.



- Hallar la información media que tiene el cuidavallas si sabe el perfil del ejecutante, tanto para el caso que sea zurdo o diestro.
- Hallar un código de largo medio mínimo para codificar las zonas del arco en ambos casos.
- Verificar que los códigos hallados son óptimos para las distribuciones respectivas.

Considerar que la probabilidad de que el ejecutante sea zurdo es $1/10$. Para codificar la zona hacia donde se arrojó el portero se propone utilizar un bit para codificar el perfil del ejecutante y luego concatenar con el código de la región correspondiente según dicho perfil.

- Hallar el largo medio de esta codificación así generada.
- Existe una forma más eficiente, ¿cuál es?

Problema 3 [8 pts.]

Se quiere transmitir una secuencia de datos binarios independientes, equiprobables, utilizando señalización polar con $p(t) = \text{sinc}(rt)$.

- Encontrar y esbozar la densidad espectral de potencia de la señal transmitida.
- ¿Cuáles son las principales características de este código de línea? En particular determinar el ancho de banda necesario para su transmisión.
- ¿Cómo varía la densidad espectral de potencia si los “1” tienen probabilidad $3/4$ y los “0” $1/4$? ¿Qué características cambian?

Problema 4 [10 pts.]

Una señal es modulada en AM con índice de modulación μ es recibida con un Receptor Superheterodino.

- Dar el diagrama del Receptor Superheterodino.
- Explicar el funcionamiento del diagrama de la parte anterior justificando la elección de los parámetros de cada bloque.

El receptor será utilizado para recibir señales de ancho de banda $W = 10$ kHz, que son enviadas en canales que se encuentran en la banda de frecuencia de 540 kHz a 1600 kHz, sin separación entre canales.

- Diseñar el rango de variación de la frecuencia del oscilador local, f_{OL} , utilizando una frecuencia intermedia, $f_{FI} = 455$ kHz. Justificar.

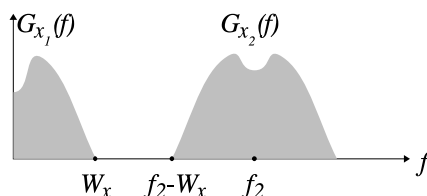
Solución

Problema 1

(a) La señal luego del sumador tiene una expresión como la siguiente

$$x_1(t) + x_2(t) \cos(2\pi f_2 t)$$

El espectro de esta señal, antes de ser modulada en FM es como el de la figura



Para que ambas señales puedan ser recuperadas no debe haber solapamiento. Esta condición se refleja en que $f_2 - W_x \geq W_x$, por lo tanto

$$f_2 \geq 2 \times W_x = 30 \text{ kHz}$$

En la recepción, luego la detección de la señal FM, la expresión de la señal detectada es

$$f_\Delta x_1(t) + f_\Delta x_2(t) \cos(2\pi f_2 t)$$

cuyo espectro es similar al de la figura anterior. Filtrando pasabajos con ancho de banda W_x recuperamos la señal $x_1(t)$ (amplificada por el f_Δ de la modulación FM). La detección sincrónica que realiza el producto por $2 \cos(2\pi f_2 t)$ deja la expresión de la señal luego antes del filtro $H_2(f)$ como

$$2f_\Delta x_1(t) \cos(2\pi f_2 t) + 2f_\Delta x_2(t) \cos^2(2\pi f_2 t) =$$

$$2f_\Delta x_1(t) \cos(2\pi f_2 t) + f_\Delta x_2(t)(1 + \cos^2(4\pi f_2 t))$$

El espectro de $x_1(t)$ queda en la banda centrada en f_2 . Mientras tanto el espectro de $x_2(t)$ queda en bandabase y en la banda de $2f_2$. Filtrando pasabajos con ancho de banda W_x recuperamos la señal $x_2(t)$. Ambos filtros son pasabajos de ancho de banda W_x .

(b)

(c) Antes que nada se debe verificar que en las condiciones planteadas se cumple con el umbral FM. Esto implica verificar que

$$SNR_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \geq SNR_{R_{th}} = 10$$

donde B_T es el ancho de banda de la señal FM, cuya estimación es

$$B_T = 2(D + 2)(f_2 + W_x)$$

dado que el ancho de banda de la señal modulada en FM es $f_2 + W_x$ y

$$D = \frac{f_\Delta}{(f_2 + W_x)}$$

Sustituyendo por los valores numéricos

$$SNR_R = \frac{10^4}{2 \times 10^{-7} \times 10^4 \times 2 \left(\frac{75}{30+15} + 2 \right) (30 + 15)} = 15 \geq SNR_{R_{th}} = 10$$

El ruido que se agrega en el canal queda, luego del detector, con un espectro parabólico con una densidad espectral de potencia

$$G_{\xi}(f) = \frac{\eta f^2}{2S_R} \Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$$

La potencia de la señal en detección en el primer canal es $S_{x_1} = f_{\Delta}^2 S_x$. La potencia del ruido corresponde a la integral de $G_{\xi}(f)$ en la banda pasante de $H_1(f)$

$$N_{R_1} = \int_{-W_x}^{W_x} G_{\xi}(f) df = \frac{\eta W_x^3}{3S_R}$$

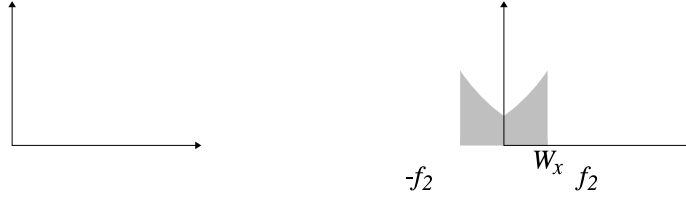
Por lo tanto la

$$SNR_{D_1} = \frac{S_{x_1}}{N_{R_1}} = \frac{3f_{\Delta}^2 S_x S_T}{\eta L W_x^3}$$

La potencia de la señal en detección en el segundo canal es $S_{x_2} = f_{\Delta}^2 S_x$. El ruido parabólico también es modulado por el detector sincrónico, su expresión es

$$G_{D_2}(f) = G_{\xi}(f - f_2) + G_{\xi}(f + f_2)$$

centrando el espectro en $\pm f_2$ como en la siguiente figura



La potencia del ruido detectado corresponde a la integral de $G_{D_2}(f)$ en la banda pasante de $H_2(f)$ que puede escribirse como

$$N_{R_2} = \int_{-W_x}^{+W_x} G_{D_2}(f) df = 2 \int_{f_2 - W_x}^{f_2 + W_x} G_{\xi}(f) df = \frac{\eta W_x}{3S_R} (2W_x^2 + 3f_2^2)$$

Por lo tanto la

$$SNR_{D_2} = \frac{S_{x_2}}{N_{R_2}} = \frac{3f_{\Delta}^2 S_x S_T}{\eta L W_x (2W_x^2 + 3f_2^2)}$$

(d) El tono utilizado en la recepción es

$$2 \cos(2\pi f_2 t + \theta)$$

Por lo tanto la señal luego del detector sincrónico queda

$$2f_{\Delta} x_2(t) \cos(2\pi f_2 t) \cos(2\pi f_2 t + \theta) = f_{\Delta} x_2(t) (\cos \theta + \cos(4\pi f_2 t + \theta))$$

que luego del filtro pasabajos queda

$$\tilde{x}_2(t) = f_{\Delta} x_2(t) \cos \theta + \xi(t) \cos(2\pi f_2 t + \theta)$$

donde el segundo término de la suma es el ruido.

En este caso la potencia del ruido no cambia, sin embargo sí lo hace la potencia de la señal; queda

$$S_{x_2} = f_{\Delta}^2 S_x \cos^2 \theta$$

Por lo tanto la SNR_D queda similar a hallada en la parte anterior multiplicada por $\cos^2 \theta \leq 1$. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ no se detecta señal en el segundo canal.

Se podría utilizar un PLL para demodular y sincronizarse con la portadora (PLL de Costas).

(e) El filtro de pre-énfasis se coloca en el transmisor entre el multiplicador y el sumador. El filtro de de-énfasis se coloca en el receptor antes del multiplicador. La función de dichos filtros es hacer que el ruido sea uniforme en todas las frecuencias del mensaje (a diferencia del ruido parabólico que presenta mayor potencia de ruido a frecuencias más altas).

Problema 2

(a) $H_D(Z) = 1.875 = 15/8$ $H_I(Z) = 2$

(b) El código de largo medio mínimo se puede obtener con Huffman. Los códigos de Huffman para ambos casos quedan: $C_I = 1, 10, 110, 1110, 1111$ $C_Q = 1, 000, 001, 010, 011$

(c) $L_I = H_I(Z)$ $L_D = H_D(Z)$

(d) $\tilde{L} = 1 + p_I H_I + p_D H_D = 1 + 0.1 \cdot 2 + 0.9 \cdot 1.875 = 2.8875$

(e) Combinando las probabilidades de ambos perfiles, tenemos una nueva distribución $p_Z = \{1/2, 1/8, 19/80, 11/160, 11/160\}$. El código de Huffman para esta distribución queda $C_Z = \{0, 100, 11, 1010, 1011\}$ y el largo medio 1.9, siendo más eficiente que la codificación anterior.

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{160}$
$\frac{19}{80}$		$\frac{11}{160}$

Problema 3

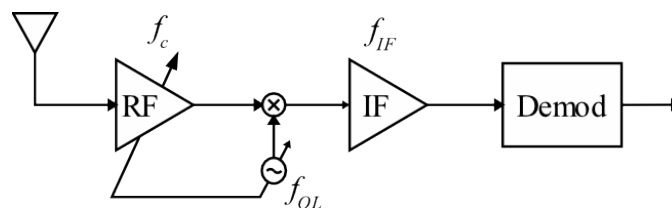
(a)

(b)

(c)

Problema 4

(a)



(b) Ver teórico.

(c) Las frecuencias centrales de los canales son:

$$f_c = 510 \text{ kHz} + n25 \text{ kHz}$$

Con n de 0 a 9. La frecuencia del oscilador es:

$$f_{OL} = f_c + f_{FI}$$

Elegimos una f_{FI} menor a la banda de frecuencias donde se encuentran las señales. Elegimos arbitrariamente $f_{FI} = 455 \text{ kHz}$ igual al utilizado para demodular AM. Podría ser considerado en el diseño de ésta frecuencia la relación entre el ancho de banda del filtro intermedio y la frecuencia central, $0.01 < \frac{B_{FI}}{f_{FI}} < 0.1$. Por lo que el rango que de oscilación del f_{OL} debe ser:

$$f_{OL} \in [965, 1190] \text{ kHz}$$