# Sistemas de Comunicación
# Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

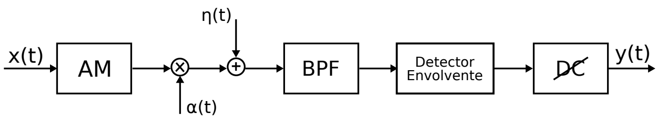
Lunes 7 de mayo de 2012

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Problema 1 [15 pts.]

Se desea transmitir una señal $x(t)$ por un canal con *fading* (atenuación variable en el tiempo) que además introduce ruido aditivo gaussiano de media nula y densidad espectal de potencia $\eta/2$ con $\eta = 10^{-5}$ W/Hz. La señal $x(t)$ tiene media nula, potencia $S_x = \frac{1}{2}$ y ancho de banda $W = 10$ kHz. Se utiliza modulación AM con índice de modulación $\mu = 0.9$ y amplitud de la portadora $A_c = 10$.




El efecto del *fading* que introduce el canal se modela como un proceso $\alpha(t)$ estacionario en sentido amplio, independiente de todos los otros procesos.

Suponiendo que el canal no introduce *fading* (i.e. $\alpha(t) = 1$):

(a) Enunciar y justificar completamente el modelo del ruido en detección.

(b) Hallar la relación señal a ruido a la salida del receptor.

De aquí en adelante considerar $\alpha(t)$ con media $a = \frac{1}{2}$ y covarianza $C_\alpha(\tau) = R_\alpha(\tau) - a^2 = \frac{1}{4}e^{-0.001|\tau|}$.

(c) Determinar la componente de continua a la salida del detector de envolvente.

(d) Hallar la relación señal a ruido a la salida del receptor.

Se desea agregar al sistema de recepción una amplificación variable en el tiempo $g_R(t)$ de manera de compensar el efecto del *fading*.

(e) ¿Qué parámetro de la señal recibida permite ajustar la ganancia? ¿Cómo lo implementaría?

## Problema 2 [10 pts.]

(a) Indicar una expresión para la información media de una fuente que toma valores discretos. ¿Cuándo es máxima?

Se tira una moneda perfecta hasta que aparece cara por primera vez o el número de tiradas es 3. Se modela el resultado de este experimento con la variable aleatoria $X$.

(b) Hallar los posibles valores de $X$ y la probabilidad de cada uno de ellos.

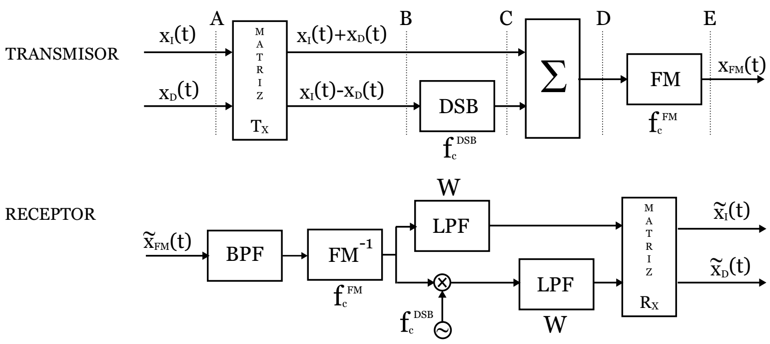
(c) Hallar la información media de $X$.

(d) Se repite indefinidamente el experimento tirando una moneda cada 10 segundos. ¿Es posible transmitir sin errores la secuencia $X[n]$ por un canal analógico de ancho de banda 1 Hz y SNR = 0 dB? Justificar.

(e) Hallar un código óptimo para $X$. Calcular el largo medio del código.

## Problema 3 [25 pts.]

La figura muestra el transmisor y receptor de un sistema de comunicación FM estéreo. Los mensajes $x_I(t)$ y $x_D(t)$ corresponden al canal izquierdo (I) y derecho (D) respectivamente. Se considera que ambos mensajes tienen media nula, potencia $S_x = \frac{1}{2}$ y ancho de banda $W = 15$ kHz. El modulador de FM utiliza una desviación en frecuencia $f_\Delta = 75$ kHz. La modulación en DSB se hace con una portadora $f_c^{\mathrm{DSB}} = 30$ kHz y la modulación en FM con una portadora $f_c^{\mathrm{FM}} = 150$ MHz. El canal cumple con las hipótesis habituales, con una atenuación en potencia $L$ y ruido AWGN con densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$. Todos los filtros se consideran ideales y la matriz del receptor es tal que se recupera la potencia de señal original en cada una de las componentes.




(a) Esbozar el espectro en cada uno de los puntos del transmisor (A, B, C, D, E).

(b) Hallar una expresión para la relación señal a ruido para $\tilde{x}_I(t)$ y $\tilde{x}_D(t)$.

A continuación se estudia un sistema de comunicación FM cuadrafónico. En este caso los cuatro canales son $x_{I_F}(t)$, $x_{I_A}(t)$, $x_{D_F}(t)$ y $x_{D_A}(t)$ que correspoden a izquierda al frente ($I_F$) y atrás ($I_A$) y derecha al frente ($D_F$) y atrás ($D_A$), respectivamente.
En este caso la componente en banda base es $x_0(t) = x_{I_F}(t) + x_{I_A}(t) + x_{D_F}(t) + x_{D_A}(t)$. Luego se modulan las componentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en DSB, en fase y cuadratura respectivamente, con $f_c = 30$ kHz. Por último se modula la componente $x_3(t) = x_{I_F}(t) - x_{I_A}(t) + x_{D_F}(t) - x_{D_A}(t)$ en DSB con $f_c = 60$ kHz.

(c) ¿Cómo debe ser la componente $x_1(t)$ para mantener la compatibilidad con el sistema FM estéreo? ¿Cómo queda la componente $x_2(t)$ para completar el sistema?

(d) Calcular el ancho de banda de transmisión necesario. Comparar con el del sistema FM estéreo.

(e) Dibujar el diagrama de bloques del receptor del sistema FM cuadrafónico.

# Solución

## Problema 1

**(a)** Ver teórico.

**(b)** Señal transmitida:

$$x_T(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos(w_c t+\phi)$$

Señal recibida:

$$x_R(t) = x_T(t) + \eta(t)$$

Potencia de la señal recibida: $E\{x_R^2(t)\} = \frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)}{2} + \eta B$. Por ser $x$, $\phi$ y $\eta$ independientes y $E\{x(t)\} = E\{\eta(t)\} = 0$.

$$SNR_R = \frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)/2}{\eta 2W} = \frac{10^2(1+0.9^2\frac{1}{2})/2}{10^{-5}210^4} = 25db.$$

Se está por arriba del umbral, por lo que la señal detectada es: $y(t) = A_c\mu x(t) + \eta_i(t)$. Al ser $x$ y $\eta_i$ independientes y $E\{x(t)\} = 0$. La potencia de $y(t)$ es $E\{y^2(t)\} = A_c^2\mu^2 S_x + \eta B$.

$$SNR_D = \frac{A_c^2\mu^2 S_x}{\eta 2W} = \frac{10^2 0.9^2\frac{1}{2}}{10^{-5}210^4} = 23db.$$

**(c)** Señal recibida:

$$x_R(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos(w_c t+\phi)\alpha(t) + \eta(t).$$

Al ser $x$, $\phi$, $\alpha$ y $\eta$ independientes y $E\{x(t)\} = E\{\eta(t)\} = 0$, la potencia recibida:

$$P_{x_R} = \underbrace{\frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)R_\alpha(0)}{2}}_{se\tilde{n}al+portadora} + \underbrace{\eta B}_{ruido}$$

$$SNR_R = \frac{A_c^2(1+\mu^2 S_x)R_\alpha(0)/2}{\eta 2W} = \frac{10^2(1+0.9^2\frac{1}{2})\frac{1}{2}/2}{10^{-5}210^4} = 22dB$$

Se está por arriba del umbral, por lo que la señal a la salida del detector de envolvente es:

$$A_c(1+\mu x(t))\alpha(t) + \eta_i(t).$$

El valor medio es

$$A_c E\{1+\mu x(t)\}E\{\alpha(t)\} + E\{\eta_i(t)\} = A_c E\{\alpha(t)\} = \frac{10}{2} = 5$$

**(d)**

$$y(t) = A_c(1+\mu x(t))\alpha(t) + \eta_i(t) - A_c a$$

$$E\{y(t)^2\} = A_c^2(1+\mu^2 S_x)R_\alpha(0) + \eta B - A_c^2 a^2 = \underbrace{A_c^2\mu^2 S_x R_\alpha(0)}_{se\tilde{n}al} + \underbrace{\eta B + A_c^2(R_\alpha(0)-a^2)}_{nose\tilde{n}al}$$

$$SNR_D = \frac{A_c^2\mu^2 S_x R_\alpha(0)}{\eta B + \frac{A_c^2}{4}} = \frac{10^2 0.9^2\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{10^{-5}210^4 + 10^2/4} = -0.95dB.$$

**(e)** La estimación de la ganancia se podría hacer directamente a partir de la potencia de la portadora a la entrada del receptor que es

$$S_P = \frac{A_c^2}{4L_A} \Rightarrow g_{\text{FI}} = \frac{A_I^2}{S_P\mu^2}$$

En la práctica se ajusta la ganancia realimentando el valor de portadora a la salida del receptor. Esto es lo que se llama control automático de volumen.

## Problema 2

**(a)** La entropía de una fuente indica su información media y su expresión para fuentes que toma valores discretos es

$$H(X) = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

donde $p_i$ es la probabilidada de que $X$ tome el valor $v_i$.
La entropía es máxima cuando todos los símbolos de la fuente son equiprobables.

**(b)** $X = \{1, 2, 3, \text{xxx}\}$ con probabilidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente.

**(c)** La información media es la entropía que vale 1.75 bits para este caso.

**(d)** Para verificar si es posible debemos primero calcular la tasa de transferencia de información $R = rH$. $H$ fue calculado en la parte anterior, por lo que resta calcular $r$. Como en este caso los símbolos tienen diferente duración, debemos calcular el tiempo medio de símbolo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{4} \times 20 + \frac{1}{8} \times 30 + \frac{1}{8} \times 30$$

Esto resulta en una tasa de transferencia de información $R = 0.1$ bps.
Ahora debemos calcular la capacidad del canal y ver si es mayor a la tasa de transferencia de información.
La capacidad del canal analógico la obtenemos de la ley de Hartley-Shannon:

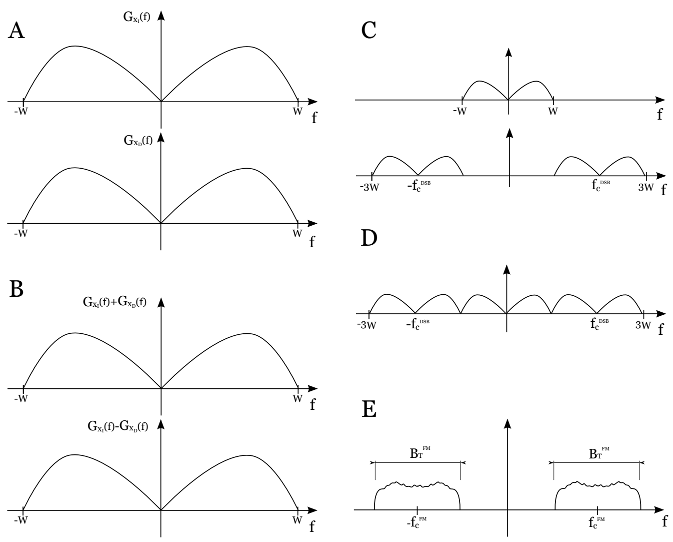
$$C = B \log_2(1 + SNR) = 1 \log_2(1 + 1) = 1 \text{ bps}$$

Por lo tanto sí es posible transmitir sin errores.

**(e)** Código de Huffman: $\{0, 10, 110y111\}$. Largo medio: 1.75 (igual a la entropía).

## Problema 3

**(a)**



**(b)**

$$S_D = f_\Delta^2 S_x$$

$$N_D = N_D^I + N_D^D = 2\int_0^W \frac{\eta f^2}{2S_R} df + 2\int_W^{3W} \frac{\eta f^2}{2S_R} df$$

$$N_D = \frac{\eta L W^3}{3S_R} + \frac{26\eta L W^3}{3S_R} = \frac{4\eta L W^3}{9S_T}$$

$$\mathrm{SNR}_D = \frac{f_\Delta^2 S_x 9 S_T}{4\eta L W^3}$$

**(c)**

$$x_1(t) = x_{I_F}(t) + x_{I_A}(t) - x_{D_F}(t) - x_{D_A}(t)$$

$$x_2(t) = x_{I_F}(t) - x_{I_A}(t) - x_{D_F}(t) + x_{D_A}(t)$$

**(d)**

$$\mathrm{BW_{FM}} = 2(\mathrm{f}_\Delta + 2\mathrm{W})$$

$$\mathrm{BW_{FM}^{stereo}} = 2(\mathrm{f}_\Delta + 2\mathrm{W}) = 2(75 + 45) = 240\ \mathrm{kHz}$$

$$\mathrm{BW_{FM}^{quad}} = 2(\mathrm{f}_\Delta + 2\mathrm{W}) = 2(75 + 75) = 300\ \mathrm{kHz}$$

**(e)**