Sistemas de Comunicación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Sábado 7 de mayo de 2011

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [25 pts.]

Una emisora de AM de Bella Unión (BU) tiene permiso para transmitir en esa ciudad con portadora 770 kHz, y en Punta del Diablo (PD) con portadora 1050 kHz durante la temporada estival. La señal tiene ancho de banda $W = 10$ kHz, potencia $S_x = 1$ y es modulada con índice de modulación $\mu = 1$.
La atenuación en el aire cumple el modelo $L_A = (4\pi\, d\, f/c)^2$ siendo d la distancia al transmisor, f la frecuencia de la portadora y $c = 3 \times 10^5$ km/s. Además, se introduce en recepción un ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta = 10^{-7}$ W/Hz.

(a) Calcular la potencia de transmisión mínima que se debería utilizar en cada localidad si se desea cubrir un radio de 10 km en BU y de 30 km en PD y ser demodulada con un detector de envolvente con una $\mathrm{SNR}_D = 50$ dB.

Las señales AM son demoduladas con un receptor superheterodino con un filtro de frecuencia intermedia en $f_{\mathrm{FI}} = 455$ kHz. El rango de las portadoras para AM es $f_c \in (540, 1600)$ Hz.

(b) Dar el diagrama de bloques del receptor superheterodino y explicar su funcionamiento.

(c) Diseñar el rango de variación de la frecuencia del oscilador local, f_{OL}. Justificar.

Se desea diseñar el sistema de recepción de forma tal que la señal se detecte con una amplificación constante A_I sin importar la potencia trasmitida y distancia recorrida. Esto se logra ajustando la ganancia del filtro de frecuencia intermedia del receptor g_{FI} (en potencia).

(d) Determinar el valor de la ganancia necesaria en función de los parámetros del sistema.

(e) ¿Qué parámetro de la señal recibida permite ajustar la ganancia? ¿Cómo lo implementaría?

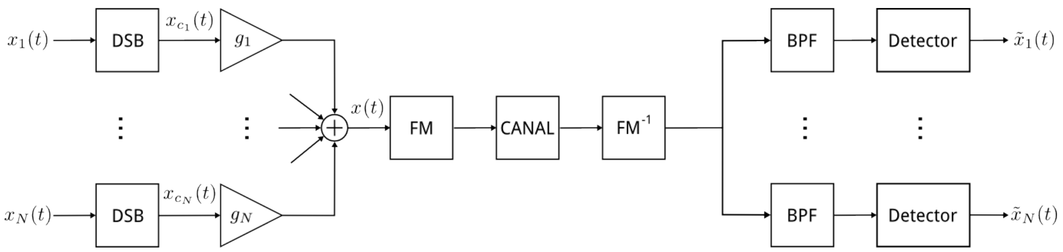
Con el objetivo de hacer llegar la señal a modular a PD, ésta se transmite a través de una fibra óptica en DSB, donde se recupera y se modula en AM en la banda autorizada. A la fibra que une BU con PD se puede acceder en Salto, Paso de los Toros y Treinta y Tres. Para determinar los parámetros de la fibra se hace un ensayo con un tramo de un kilómetro presentando una atenuación L_F en potencia y un ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta_F$.
Se colocará un repetidor en algún punto de la fibra para maximizar la SNR_R. El repetidor introduce un ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta_R \gg \frac{1}{2}\eta_F$. Se supondrá que el repetidor y el receptor son constructivamente similares y las ganancias compensan las atenuaciones en el tramo correspondiente.

(f) ¿En qué ciudad colocaría el repetidor? Justificar.

(g) Dar la expresión de la SNR_R en función de los parámetros del sistema y las distancias a BU y a PD.

Problema 2 [25 pts.]

Se considera el transmisor y el receptor de la figura, donde N mensajes $x_i(t)$ independientes, de ancho de banda W y de potencia media P_x se transmiten multiplexados en frecuencia. Se modulan en DSB sobre subportadoras $f_{c_i} = (2i-1)W$ con $i = 1 \dots N$, todas con igual potencia S_{DSB}. Luego la suma de todas ellas se modula en frecuencia con portadora $f_c \gg 2NW$, constante de desviación de frecuencia f_Δ y potencia de transmisión S_T.



El canal tiene una atenuación en potencia L e introduce ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta$ referido a la entrada del receptor. Las ganancias en potencia g_i deben cumplir $S_{\text{DSB}} \sum_i g_i = S_x$, donde $x(t)$ es la señal antes del modulador FM.

(a) Hallar el máximo número $N_{\text{máx}}$ de canales que se puede transmitir si se requiere una relación señal a ruido a la salida del discriminador igual o mayor a SNR_{FM}.

(b) Calcular $N_{\text{máx}}$ para los valores de los parámetros indicados al final del problema. Hallar el ancho de banda utilizado en la transmisión en este caso.

(c) Bosquejar la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del demodulador FM.

(d) Hallar la SNR_D^i para cada señal $x_i(t)$. Verificar que el resultado es de la forma:

$$\mathrm{SNR}_D^i = \frac{K g_i}{i^3 - (i-1)^3}$$

siendo K una constante que depende de los parámetros fijos del sistema.

En las partes siguientes se consideran dos posibles alternativas para elegir las ganancias g_i. Se busca comparar la capacidad total del canal, considerando ésta como la suma de las capacidades en cada uno de los canales del sistema.

(e) Hallar la relación señal a ruido en cada canal si se utilizan todas las ganancias g_i iguales. Expresar la capacidad total del canal para este caso.

(f) Hallar las ganancias g_i para que la relación señal a ruido en cada canal sea la misma. Hallar dicha SNR y expresar la capacidad total del canal para este caso.

(g) Calcular ambas capacidades para los valores de los parámetros indicados al final del problema y elegir la opción más conveniente para este caso.

Datos: $W = 8$ kHz, $P_x = 1$, $S_{\text{DSB}} = 400$ mW, $f_c = 100.0$ MHz, $f_\Delta = 75$ kHz, $S_T = 30$ W, $S_x = 1/2$, $L = 20$, $\eta = 10^{-7}$ W/Hz, $\mathrm{SNR}_{\text{FM}} = 30$ dB.

Pueden ser útiles las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Solución

Problema 1

(a) Sea $B_{\text{AM}} = 2W$ y

$$\gamma = \frac{S_T}{L_A \eta_A W}$$

con $L_A = (4\pi df/c)^2$.
Hay dos condiciones que verificar en cada localidad:

- $\text{SNR}_D \geq \text{SNR}_D^0 = 30 \text{ dB} = 10^3$

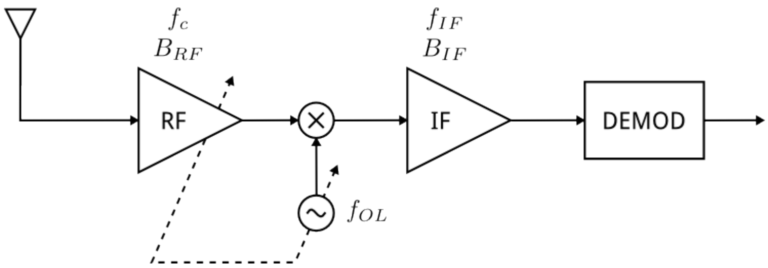
$$\frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\gamma \geq \text{SNR}_D^0 \Rightarrow S_T \geq \text{SNR}_D^0 \left(\frac{1+\mu S_x}{\mu S_x}\right) L_A \eta_A W \tag{1}$$

- $\text{SNR}_R \geq \text{SNR}_{\text{TH}} = 10 \text{ dB}$

$$\frac{S_T}{L_A \eta_A B_{\text{AM}}} \geq 10 \Rightarrow S_T \geq 10 L_A \eta_A B_{\text{AM}} \tag{2}$$

Finalmente S_T debe de cumplir con las dos condiciones (ecuaciones (1) y (2)) simultáneamente.

(b)



Ver teórico.

(c) La frecuencia del oscilador local puede ser

$$f_{\text{OL}} = f_c \pm f_{\text{FI}}.$$

Elegiremos aquella que tenga el menor rango dinámico

$$RD = 10 \log_{10} \frac{f_{\text{máx}}}{f_{\text{mín}}}$$

$$f_{\text{OL}} = f_c - f_{\text{FI}} = (85, 1145) \Rightarrow RD = 11.3 \text{ dB}$$
$$f_{\text{OL}} = f_c + f_{\text{FI}} = (955, 2055) \Rightarrow RD = 3.3 \text{ dB}$$

(d) La señal luego del filtro FI tiene la siguiente expresión

$$x_I(t) = \frac{A_c}{2}\sqrt{\frac{g_{\text{FI}}}{L_A}}\Big(1+\mu x(t)\Big)\cos(\omega_{\text{FI}} t)$$

La amplificación que recibe la señal que deseamos igualar a A_I es:

$$\frac{A_c}{2}\sqrt{\frac{g_{\text{FI}}}{L_A}}\mu = A_I$$

La ganancia del filtro FI debe ser

$$g_{\text{FI}} = \left(\frac{2A_I}{\mu A_c}\right)^2 L_A$$

(e) La estimación de la ganancia se podría hacer directamente a partir de la potencia de la portadora a la entrada del filtro FI, que es

$$S_P = \frac{A_c^2}{4L_A} \Rightarrow g_{\text{FI}} = \frac{A_I^2}{S_P \mu^2}$$

En la práctica se ajusta la ganancia realimentando el valor de portadora a la salida del filtro de FI. Esto es lo que se llama control automático de volumen.

(f) El punto óptimo para colocar el repetidor es el punto medio de la trayectoria; o el más cercano a él. En este caso es en Paso de los Toros.

(g) El modelo para el canal "duro" es

- $L(d) = L_F^d$
- $\eta(d) = \eta_F \frac{L_F^{-d}-1}{L_F^{-1}-1}$

La SNR_R queda

$$\text{SNR}_R = \frac{\frac{g_1 g_2 S_T}{L(d_1)L(d_2)}}{2W\left((\eta(d_1)+\eta_R)\frac{g_1 g_2}{L(d_2)} + (\eta(d_2)+\eta_R)g_2\right)}$$

donde d_1 es la distancia de PT a BU y d_2 es la distancia de PT a PD. Además $g_i = L(d_i)$.
Usando que $\eta_R \gg \eta_F$ queda

$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{2W\eta_R(L(d_1)+L(d_2))}$$

Problema 2

(a) La SNR_D para nuestro transmisor FM es:

$$\text{SNR}_D = 3D^2 S_x \gamma \text{ con } \gamma = \frac{S_T}{\eta L W_x} \text{ y } W_x = 2NW$$

Así, tenemos que:

$$\frac{3D^2 S_x S_T}{\eta L 2NW} \geq \text{SNR}_{\text{FM}}$$

siendo

$$D = \frac{f_\Delta}{W_x} = \frac{f_\Delta}{2NW}$$

De esta ecuación es posible despejar N:

$$N^3 \leq \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta L 8W^3 \text{SNR}_{\text{FM}}}$$

Llamemos N_1 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Todo esto es válido si estamos trabajando sobre el umbral de FM, por lo que debemos imponer esta condición:

$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \geq 10$$

donde

$$B_T = 2(D+2)2NW = 2\frac{f_\Delta + 4NW}{2NW}$$

De esta condición es posible despejar N:

$$N \leq \frac{S_T - 20\eta L f_\Delta}{80\eta L W}$$

Llamemos N_2 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Entonces, dado que es necesario que se cumplan ambas condiciones, el máximo número de canales que se pueden transmitir queda:

$$N_{\text{máx}} = \text{mín}\{N_1, N_2\}$$

(b) El valor de D es entonces:

$$D = \frac{f_\Delta}{2N_{\text{máx}}W}$$

Según el valor que tome D tenemos que el ancho de banda resulta ser:
$B_T = 2f_\Delta$ si $D \gg 1$
$B_T = 4N_{\text{máx}}W$ si $D \ll 1$
$B_T = 2(D+2)2N_{\text{máx}}W$ si $D \in [1, 10]$

```
>> (3*(75000)^2*0.5*30/(10^-7*20*(2*8000)^3*10^3))^(1/3) = 3.14
```

```
>> (30-20*10^-7*20*75000)/(80*10^-7*20*8000) = 21.09
```

Tenemos que $N_1 = 3$ y $N_2 = 21$, por lo tanto el máximo es:

$$N_{\text{máx}} = 3$$

En este caso D queda:

```
>> D = 75000/(2*3*8000) = 1.5625
```

En este caso el ancho de banda de transmisión queda:

$$B_T = 2(D+2)2N_{\text{máx}}W = 342 \text{ kHz}$$

```
>> 2*(75000/(2*3*8000)+2)*2*3*8000 = 342000
```

(c) Graficar la parábola $G_n(f) = f^2 \frac{\eta L}{2S_T}\Pi(f/B_T)$.

(d) Ambas, SNR_R y SNR_D, son iguales para cada canal por ser DSB.
La potencia del ruido detectado en el canal i es:

$$N_D^i = 2\int_{2(i-1)W}^{2iW} \frac{\eta f^2}{2S_R} = \frac{\eta W^3}{3S_R}((2i)^3 - (2i-2)^3)$$

La potencia de la señal detectada en el canal i es:

$$S_D^i = f_\Delta^2 g_i S_{\text{DSB}}$$

Por lo tanto:

$$SNR_R^i = \text{SNR}_D^i = \frac{3S_T f_\Delta^2 g_i S_{\text{DSB}}}{\eta L(2W)^3(i^3 - (i-1)^3)}$$

(e) En este caso las ganancias son todas iguales y además deben cumplir $S_{\text{DSB}}\sum_i g_i = S_x$, por lo que quedan:

$$g_i = \frac{1}{N}\frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

De esta forma la relación señal a ruido de cada canal queda:

$$SNR_D^i = \frac{3S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta LN(2W)^3(i^3 - (i-1)^3)}$$

La capacidad total del canal para este caso queda:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i = \sum_{i=1}^{N} W\log_2(1 + SNR_D^i)$$

(f) Deseamos que para todo i, j se cumpla $SNR^i_D = SNR^j_D$, esto implica:

$$g_1 = \frac{g_i}{i^3 - (i-1)^3} = \frac{g_j}{j^3 - (j-1)^3}$$

Además las ganancias deben cumplir:

$$S_{\text{DSB}} \sum_i g_i = S_x$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} g_1(i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^{N} g_i = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

De donde podemos despejar g_1:

$$g_1 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3) = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

$$g_1 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3) = g_1(1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + ... + (N-1)^3 - (N-2)^3 + N^3 - (N-1)^3) = g_1 N^3$$

$$g_1 = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

También podemos despejar g_1 utilizando las fórmulas de las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} (3i^2 - 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{N} i^2 - 3\sum_{i=1}^{N} i + N = 3\frac{N(N+1)}{2} - 3\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + N = N^3$$

De esta forma se calcula g_i para un i genérico:

$$g_i = \frac{S_x(i^3 - (i-1)^3)}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

Entonces la relación señal a ruido es la misma para cada canal y queda:

$$\text{SNR}^i_D = \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 (2W)^3}$$

La capacidad total del canal para este caso queda:

$$C = \sum_i C_i = \sum_i W \log_2(1 + SNR^i_D) = NW \log_2\left(1 + \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 (2W)^3}\right)$$

(g) Observar que para el primer caso el cálculo de las SNR^i_D es siempre el mismo a menos de un coeficiente en el denominador que varía para cada $i = 1..3$, siendo 1, 7 y 19 respectivamente para este caso.
De esta forma la capacidad para el primer caso queda:

$$C = 575 \text{ kbps}$$

Para el segundo caso todas las SNR^i_D son iguales y la capacidad queda:

$$C = 535.7 \text{ kbps}$$

En este caso es mejor la primera opción para obtener una mayor capacidad total, por lo que sería más conveniente utilizar todas las ganancias iguales que ajustarlas para tener la misma SNR en todos los canales. En realidad, el óptimo no es ni un caso ni el otro, aunque se asemeja más a la segunda opción, donde uno tiene en cuenta el ruido introducido en cada canal para elegir cuánta potencia vale la pena gastar en transmitir por ese canal. A diferencia de considerar la misma SNR en cada canal, el óptimo se obtiene equiparando las SNR pero con cierto tope para cada ganancia, dado que llega un punto en el cual el ruido es tan alto en un canal que directamente no sirve utilizarlo. Esta fundamentación es la base de la técnica denominada *water filling*, que se utiliza para seleccionar la potencia en cada portadora en sistemas OFDM (técnica de modulación que trabaja con un gran número de portadoras simultáneamente) para trabajar en canales con ruido variable en el tiempo (como por ejemplo sistemas celulares o redes inalámbricas).