Consideremos una transferencia de segundo orden, de la forma:

$$H(j\omega) = K'.\frac{(j\omega).\omega_0}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

con $\zeta \in (0,1)$, por lo que tiene un par de raíces complejas conjugadas en el denominador. Podemos re-escribirla como

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0}{Q}.\frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}.(j\omega) + \omega_0^2}$$

Tenemos que

$$H(j\omega_0) = \frac{K'}{2\zeta} = K$$

por lo que las expresiones se igualan con $K' = \frac{K}{Q}$ y $Q = \frac{1}{2\zeta}$[1].

Si trabajamos con la segunda expresión de la transferencia, podemos poner

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{K^2}{1 + Q^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Consideremos la frecuencia

$$\omega_1 = \omega_0.\left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right]$$

Verifiquemos que $|H(j\omega_1)| = \frac{K^2}{2}$, lo que implica una atenuación de $3dB$ respecto del valor en ω_0.

Notemos que

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega_1} = \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}$$

Calculemos la expresión:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4Q^2} + 2.\frac{1}{2Q}.\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{4Q^2}$$

Entonces

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{Q}.\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} = \frac{1}{Q}.\left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}\right] = \frac{1}{Q}.\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)$$

Lo anterior se resumen en la siguiente identidad:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{Q^2}.\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{Q^2} \Rightarrow |H(j\omega_1)|^2 = \frac{K^2}{2}$$

[1] De acá sale una condición en Q para que haya raíces complejas conjugadas.