Teoría de circuitos

Primer parcial - Demo 2

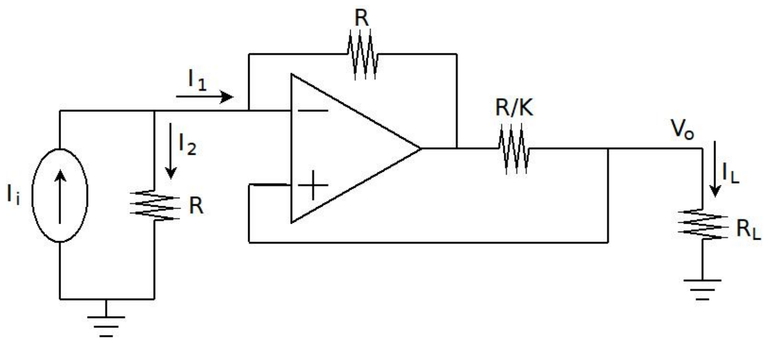
2^o semestre 2020

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SER PROLIJO Y EXPLICAR Y DETALLAR BIEN TODOS SUS PASOS. Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Todos los operacionales son ideales. Se sugiere explicar bien cómo los analiza en los circuitos.**

Problema 1 (XX puntos)

En e circuito de la figura

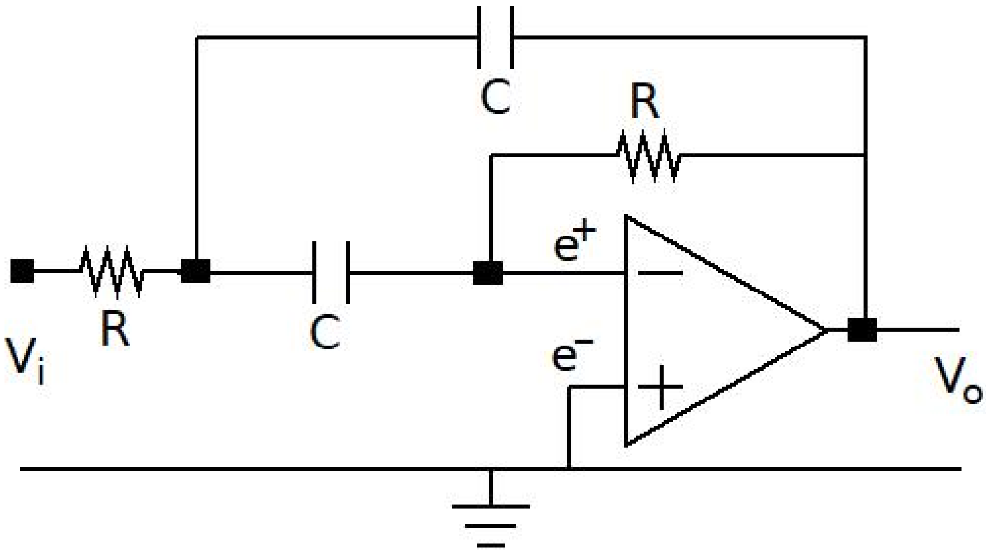


a) Mostrar que $I_L = -K.I_1$.

b) Hallar la relación entre I_i e I_L.

Problema 2 (XX puntos)

En el circuito de la figura, el operacional es ideal.



a) Explicando claramente cómo analiza el circuito, hallar la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

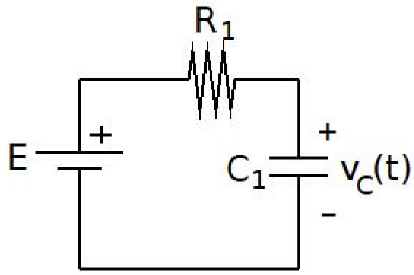
b) Simplificar la expresión en función de $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y verificar que el circuito implementa un **filtro pasa altos** de segundo orden.

c) Realizando un análisis por bandas, bosquejar los diagramas de Bode asintóticos. Explicar bien cómo lo hace.

d) Hallar la distancia exacta entre el diagrama real de módulo y el asintótico, para $\omega = \omega_0$ y para una frecuencia una octava mayor. Expresar las distancias en decibeles.

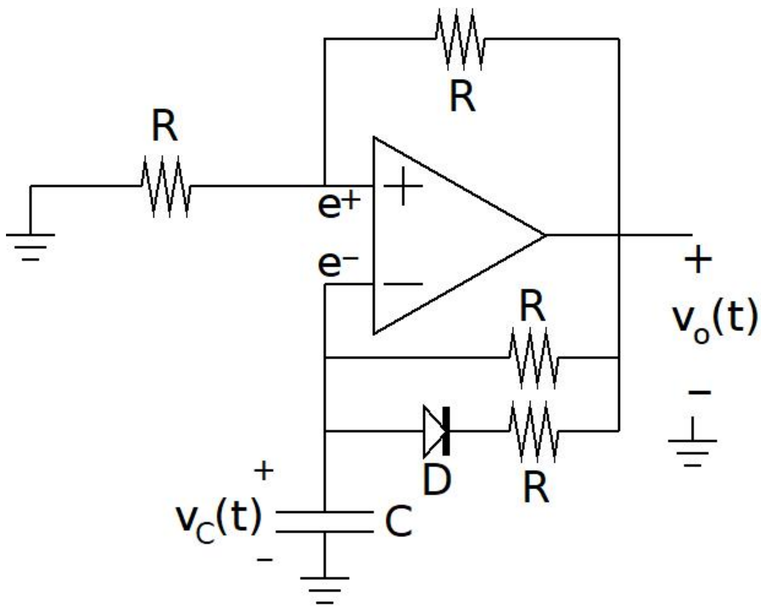
d) ¿Existe una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual la salida en régimen presente un adelanto de 120^o respecto de la entrada? Justificar la respuesta y si es afirmativa, ubicar aproximadamente ω_1 en el diagrama de Bode.

Problema 3 (XX puntos) En el circuito de carga/descarga del condensador, se sabe que



$$v_C(t) = E + (v_{C0} - E)e^{-\frac{t}{R_1C_1}}$$

siendo v_{C0} la tensión inicial del condensador. Se considera el circuito de la figura de abajo, con el operacional ideal, alimentado por $\pm V_{CC}$ y funcionando como comparador. El diodo es ideal. El condensador está inicialmente descargado. Supondremos que el operacional arranca saturado a $+V_{CC}$.



a) Hallar el instante T_1 en el que conmuta el operacional por primera vez.

b) Hallar T_2 que cumple que el operacional vuelve a conmutar en $T_1 + T_2$.

c) Hallar T_2 que cumple que el operacional vuelve a conmutar en $T_1 + T_2 + T_3$.

d) Verificar que en ese instante el circuito alcanza un régimen de funcionamiento periódico.

JUSTIFICAR claramente cómo analiza el funcionamiento del comparador y del diodo.

Problema 4 (XX puntos)

Un motor presenta una impedancia inductiva Z a la frecuencia de trabajo $50Hz$. Para hallar Z, se realiza un ensayo del motor, en el que se lo alimenta con una tensión sinusoidal de 50Hz y 230V eficaces. Se obtienen los siguientes resultados:

- la fuente entrega una corriente de $4A$ eficaces.
- la potencia consumida a la fuente es de $850W$.

a) Hallar la reactiva que consume el motor durante el ensayo.

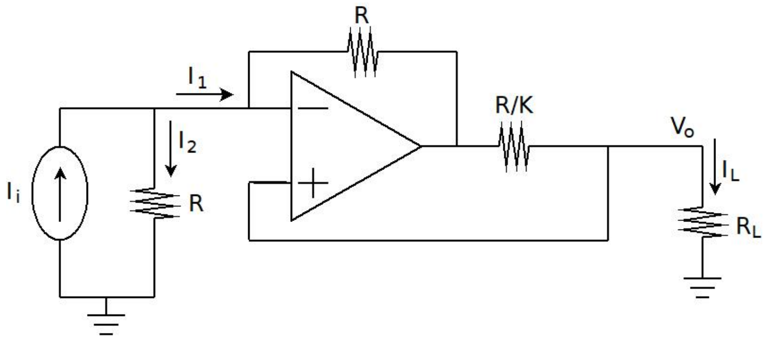
b) Hallar un modelo paralelo para Z ($Z = R_P||jX_P$).

c) Si se quisiera compensar la reactiva consumida por el motor a la fuente, ¿qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría?

Solución

Problema 1 (XX puntos)

En e circuito de la figura



a) Mostrar que $I_L = -K.I_1$.

Denotemos por V_1 la tensión de salida del operacional e^- la tensión en la pata $-$. Referimos todas las tensiones a tierra. Al ser el operacional ideal y estar en zona lineal, tenemos el cortocircuito virtual de las patas $+$ y $-$. Además, no entra corriente por dichas patas. Tenemos entonces que la tensión en bornes de R_L es $V_o = e^+ = e^-$, por lo que:

$$I_L = \frac{e^-}{R_L}$$

Por otro lado,

$$I_L = \frac{V_1 - V_o}{R/K} = K.\frac{V_1 - V_o}{R}$$

La corriente I_1 pasa toda por la resistencia R de realimentación del operacional:

$$I_1 = \frac{e^- - V_1}{R} = \frac{V_o - V_1}{R} = -\frac{I_L}{K} \Rightarrow I_L = -K.I_1$$

b) Hallar la relación entre I_i e I_L.

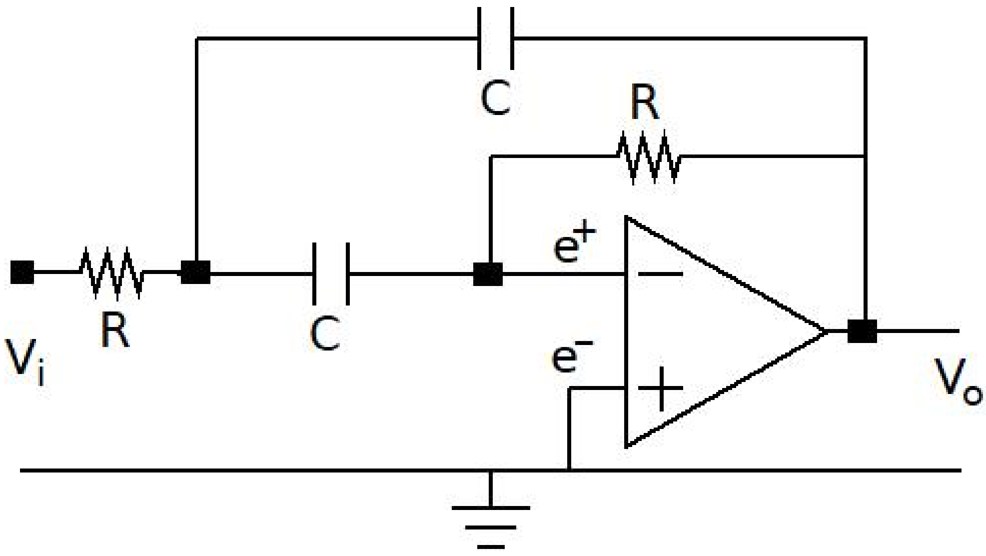
Sabemos que

$$I_i = I_1 + I_2 = -\frac{I_L}{K} + \frac{e^-}{R} = -\frac{I_L}{K} + \frac{V_o}{R} = -\frac{I_L}{K} + \frac{R_L.I_L}{R} = I_L\left(\frac{R_L}{R} - \frac{1}{K}\right) = I_L\left(\frac{K.R_L - R}{K.R}\right)$$

De donde

$$I_L = \left(\frac{K.R}{K.R_L - R}\right).I_i$$

Observar que si $K.R_L \gg R$, entonces $I_i \approx \frac{R}{R_L}.I_i$, en tanto que si $K.R_L \ll R$, $I_i \approx -K.I_L$.



Problema 2 (XX puntos)

En el circuito de la figura, el operacional es ideal.

a) Explicando claramente cómo analiza el circuito, hallar la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Observemos que el operacional se encuentra en una configuración inversora, por lo que

$$V_o = -RCj\omega V_1$$

siendo V_1 la tensión del nodo intermedio. Plantenado las corrientes que llegan y slaen de dicho nodo, obtenemos:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 Cj\omega + (V_1 - V_o).Cj\omega = -\frac{V_o}{R} + (V_1 - V_o).Cj\omega$$

De donde

$$\frac{V_i}{R} = V_1.\left[\frac{1}{R} + Cj\omega\right] - V_o.\left[\frac{1}{R} + Cj\omega\right] = \left[\frac{1 + RCj\omega}{R}\right].[V_1 - V_o] = \left[\frac{1 + RCj\omega}{R}\right].\left[\frac{V_o}{-RCj\omega} - V_o\right]$$

Entonces

$$\frac{V_i}{R} = -\left[\frac{1 + RCj\omega}{R}\right].\left[\frac{1 + RCj\omega}{RCj\omega}\right].V_o = -\left[\frac{(1 + RCj\omega)^2}{R^2Cj\omega}\right].V_o \Rightarrow H(j\omega) = -\frac{RCj\omega}{(1 + RCj\omega)^2}$$

b) Simplificar la expresión en función de $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y verificar que el circuito implementa un **filtropasa-banda** de segundo orden.

$$H(j\omega) = -\frac{RCj\omega}{(1 + RCj\omega)^2} = -\frac{\frac{1}{RC}.(j\omega)}{(j\omega + \frac{1}{RC})^2} = -\frac{\omega_0.(j\omega)}{(j\omega + \omega_0)^2}$$

c) Realizando un análisis por bandas, bosquejar los diagramas de Bode asintóticos. Explicar bien cómo lo hace.

Lo primero que hacemos es identificar las frecuencias críticas. En el numerador tenemos $\omega = 0$, (que no define ninguna banda de interés, y que muestra que el circuito filtra la continua y, por lo tanto, las bajas frecuencias. En el denominador tenemos $\omega = \omega_0$ (corresponde a la raíz doble $-\omega_0$). Tenemos entonces dos bandas de frecuencias de interés: las bajas frecuencias, menores a ω_0, y las altas frecuencias, mayores a ω_0. En cada banda hacemos una aproximación asintótica.

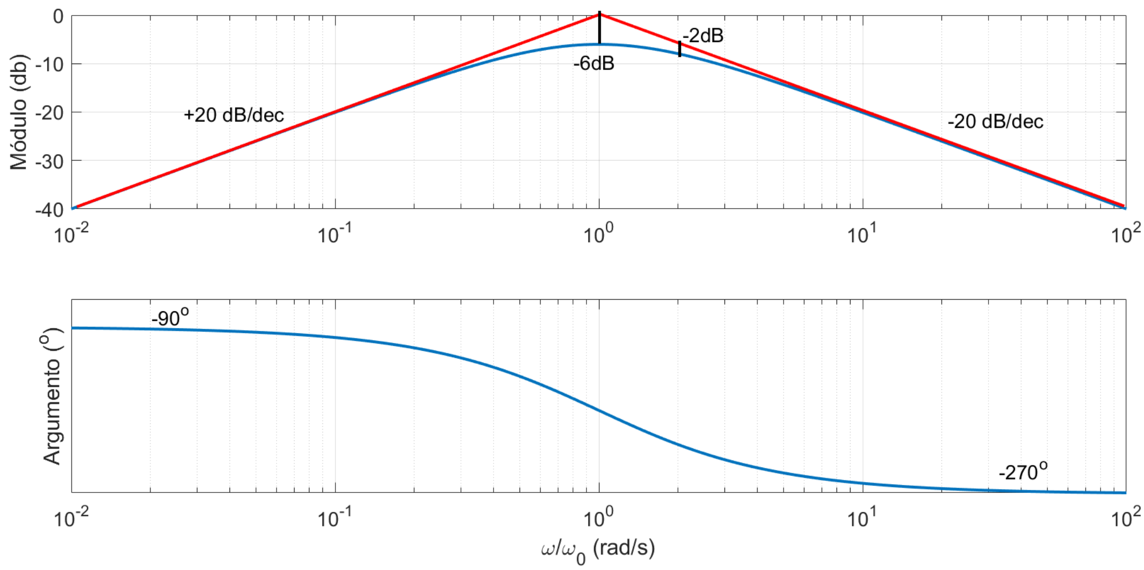
$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_0.(j\omega)}{(\omega_0)^2} = \frac{-(j\omega)}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [-20\log(\omega_0) + 20\log(\omega)]\, db \\ arg(H) & \approx & -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega_0 =\ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{\omega_0.(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{-\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)]\, db \\ arg(H) & \approx & \frac{\pi}{2}\ (\text{ó } -\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Surge la duda que puede sobre la fase asintótica en alta frecuencia: si la fase *sube* de $-\pi/2$ a $+\pi/2$ o si *baja* de $-\pi/2$ a $-3\pi/2$[1]. Lo que podemos hacer es evaluar en un punto intermedio. Por comodidad, elegimos $\omega = \omega_0$:

$$H(j\omega_0) = -\frac{\omega_0(j\omega_0)}{(j\omega_0 + \omega_0)^2} = -\frac{j}{(j+1)^2} \Rightarrow arg\, H(j\omega_0) = \pi + \frac{\pi}{2} - 2.\frac{\pi}{4} = \pi$$

Notemos que resulta ser un número real negativo, por lo que la fase disminuye desde -90 grados a -270 grados. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$. Observar que el diagrama de fase muestra el mismo recorrido que hallamos analíticamente, pero en otro rango de valores (tener presente que la fase está definida a menos de múltiplos de 2π).



[1] Si fuera una variación de solamente 90 grados, no habría dudas, ya que podemos pensar en el *camino más corto*.

d) Hallar la distancia exacta entre el diagrama real de módulo y el asintótico, para $\omega = \omega_0$ y para una frecuencia una octava mayor. Expresar las distancias en decibeles.

Veamos primero $\omega = \omega_0$. Como aproximacion asintótica, usamos la de baja frecuencia, que es más sencilla.

$$|H_{re}(j\omega_0)|_{dB} - |H_{as}(j\omega_0)|_{dB} = 20.\log\left[\frac{|H_{re}(j\omega_0)|}{|H_{as}(j\omega_0)|}\right] = 20.\log\left[\frac{|-\frac{j}{(j+1)^2}|}{|\frac{-(j\omega_0)}{\omega_0}|}\right] = 20.\log\left[\frac{|\frac{j}{(j+1)^2}|}{|j|}\right]$$

$$|H_{re}(j\omega_0)|_{dB} - |H_{as}(j\omega_0)|_{dB} = 20.\log\left[\frac{1}{|j+1|^2}\right] = -20\log(2) \approx -6dB$$

Hacemos la misma cuenta, pero ahora evaluando en $\omega = 2\omega_0$.

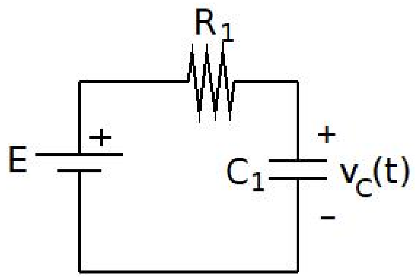
$$|H_{re}(j2\omega_0)|_{dB} - |H_{as}(j2\omega_0)|_{dB} = 20.\log\left[\frac{|H_{re}(j2\omega_0)|}{|H_{as}(j2\omega_0)|}\right] = 20.\log\left[\frac{|-\frac{j2}{(j2+1)^2}|}{|\frac{-\omega_0}{j2\omega_0}|}\right] = 20.\log\left[\frac{\frac{2}{|j2+1|^2}}{|\frac{-1}{j2}|}\right]$$

$$|H_{re}(j2\omega_0)|_{dB} - |H_{as}(j2\omega_0)|_{dB} = 20.\log\left[\frac{4}{|j2+1|^2}\right] = 20.\log\left[\frac{4}{5}\right] \approx -2dB$$

d) ¿Existe una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual la salida en régimen presente un adelanto de 120^o respecto de la entrada? Justificar la respuesta y si es afirmativa, ubicar aproximadamente ω_1 en el diagrama de Bode.

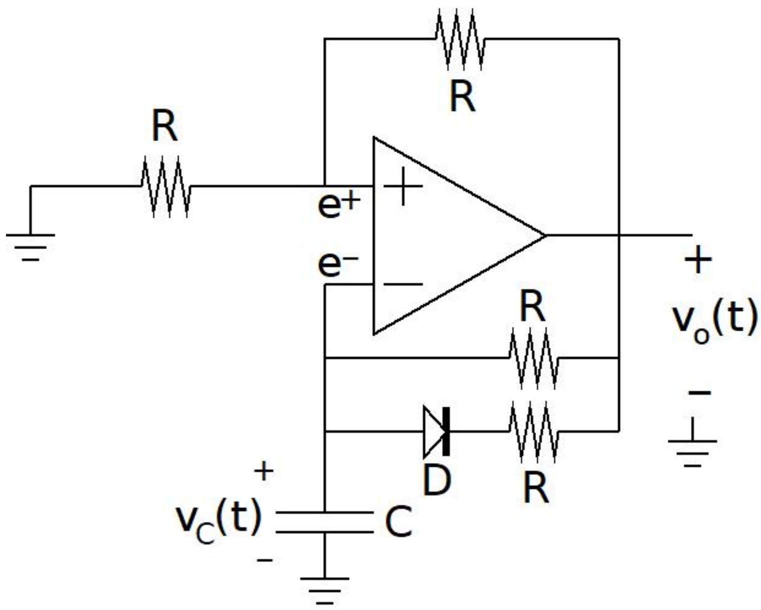
Recordemos que la diferencia de fase entre la entrada y la salida en régimen está dada por el argumento de la transferencia evaluada en la frecuencia de trabajo. Por lo tanto, al ser en este caso la fase una función continua de la frecuencia, tenemos que mirar el diagrama de Bode de fase y ver si pasa por $+120^o$ o, lo que es lo mismo, por -240^o, cosa que vemos que pasa en una alta frecuencia, superior a ω_0.

Problema 3 (XX puntos) En el circuito de carga/descarga del condensador, se sabe que



$$v_C(t) = E + (v_{C0} - E)e^{-\frac{t}{R_1C_1}}$$

siendo v_{C0} la tensión inicial del condensador. Se considera el circuito de la figura de abajo, con el operacional ideal, alimentado por $\pm V_{CC}$ y funcionando como comparador. El diodo es ideal. El condensador está inicialmente descargado. Supondremos que el operacional arranca saturado a $+V_{CC}$.



a) Hallar el instante T_1 en el que conmuta el operacional por primera vez.

Suponemos V_{CC} a la salida del opamp. Luego tendremos que verificar que $e^+ > e^-$. Veamos qué pasa con el diodo. La diferencia de tensión en bornes del diodo puede escribirse como

$$v_D = v_C - (-R.i_D + v_o)$$

donde medimos v_D e i_D en el sentido usual. Al ser $v_o = +V_{CC}$ e inicialmente $v_C = 0$, es sencillo verificar que el diodo está inicialmente cortado. Esto es intuitivo si pensamos que a la salida del operacional está la tensión más alta posible del circuito.

Con el diodo OFF, nos queda un circuito de carga del condensador con constante de tiempo RC, y la evolución temporal inicial del condesandor será:

$$v_C(t) = V_{CC} + (0 - V_{CC})e^{-\frac{t}{RC}} = V_{CC}.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Esta expresión se mantendrá váida en tanto el diodo se encienda (lo que cambiaría la constante de tiempo del circuito de carga) o conmute el operacional, lo que cambiaría el valor asintótico de la carga. Veamos la tensión del diodo (que está OFF):

$$v_D = v_C - V_{CC} = V_{CC}.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - V_{CC} = -V_{CC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

que es negativa en tanto no conmute el operacional, por lo que el diodo seguirá cortado. Verifiquemos el estado del operacional. usando el divisor de tensión, sabemos que $e^+(t) = \frac{V_o}{2} = \frac{V_{CC}}{2}$, en tanto:

$$e^-(t) = v_C(t) = V_{CC}.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Notemos que e^- arranca en 0 y comienza a crecer hacia $+V_{CC}$, por lo que en cierto instante T_1 llegará al valor $\frac{V_{CC}}{2}$ y hará conmutar al operacional. Calculemos T_1:

$$V_{CC}.\left(1 - e^{-\frac{T_1}{RC}}\right) = \frac{V_{CC}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{T_1}{RC}} \Rightarrow T_1 = RC.ln2$$

b) Hallar T_2 que cumple que el operacional vuelve a conmutar en $T_1 + T_2$.

Comenzamos un nuevo tramo de análisis. Al conmutar el operacional, es natural suponer que el diodo pasa a estar ON, ya que la tensión del lado derecho baja abruptamente, en tanto la del lado izquierdo se mantiene. Al conducir el diodo, el circuito de carga/descarga del condensador tiene ahora los siguientes parámetros: condición inicial $\frac{V_{CC}}{2}$ (la que tenía al momento de conmutar el operacional), tensión asintótica $-V_{CC}$ y constante de tiempo $\frac{RC}{2}$ (ya que hay dos resistencias de valor R en paralelo). Denotemos por t' el tiempo en este nuevo tramo (para evitar hacer *traslaciones temporales*). Tenemos que $e^+ = -\frac{V_{CC}}{2}$ y

$$e^-(t') = v_C(t') = -V_{CC} + \left(\frac{V_{CC}}{2} + V_{CC}\right)e^{-\frac{2t'}{RC}} = V_{CC}.\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{2t'}{RC}} - 1\right)$$

Observemos que efectivamente se cumple que $e^+ < e^-$ para $t' \geq 0$. Al transcurrir el tiempo, la tensión del condensador tiende a $-V_{CC}$ y en algún momento e^- igualará a e^+ y el operacional conmutará. Esto sucederá cuando $t' = T_2$ tal que

$$-\frac{V_{CC}}{2} = V_{CC}.\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{2T_2}{RC}} - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^{-\frac{2T_2}{RC}} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-\frac{2T_2}{RC}} \Rightarrow T_2 = \frac{RC}{2}.ln\,(3)$$

No nos olvidemos de verificar la hipótesis del diodo ON. La corriente por el diodo es

$$i_D = \frac{v_C - (-V_CC)}{R} = \frac{V_{CC}.\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{2t'}{RC}} - 1\right) + V_{CC}}{R} = \frac{V_{CC}.\frac{3}{2}e^{-\frac{2t'}{RC}}}{R}$$

y resulta ser positiva, hasta tanto no conmute el operacional.

c) Hallar T_2 que cumple que el operacional vuelve a conmutar en $T_1 + T_2 + T_3$.

En este nuevo tramo razonamos igual que en la anterior. Suponemos que el operacional está en $+V_{CC}$ y que el diodo está OFF. Los parámetros para el circuito de carga/descarga del condensador son: condición inicial $-\frac{V_{CC}}{2}$, constante de tiempo RC y tensión asintótica $+V_{CC}$. Definimos un nuevo tiempo t'' y tenemos que: $e^+ = +\frac{V_{CC}}{2}$,

$$e^-(t'') = v_C(t'') = V_{CC} + (-\frac{V_{CC}}{2} - V_{CC})e^{-\frac{t''}{RC}} = V_{CC}.\left(1 - \frac{3}{2}.e^{-\frac{t''}{RC}}\right)$$

Observemos que inicialmente, $e^+ > e^-$ y que la tensión del diodo, supuesto OFF, vale

$$v_D = v_C - V_{CC}$$

que es inicialmente negativa. Todo esto se cumplirá en tanto no conmute el operacional, lo que sucederá en un instante $t'' = T_3$ tal que $v_C(T_3) = +\frac{V_{CC}}{2}$:

$$V_{CC}.\left(1 - \frac{3}{2}.e^{-\frac{T_3}{RC}}\right) = \frac{V_{CC}}{2} \Rightarrow 1 - \frac{3}{2}.e^{-\frac{T_3}{RC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{T_3}{RC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_3 = RC.ln(3)$$

d) Verificar que en ese instante el circuito alcanza un régimen de funcionamiento periódico.

Al conmutar el operacional, estamos como al principio de la parte b): el operacional en $-V_{CC}$, el condensador cargado a $\frac{V_{CC}}{2}$ y el diodo ON, por lo que entramos en régimen periódico.

Problema 4 (XX puntos)

Un motor presenta una impedancia inductiva Z a la frecuencia de trabajo $50Hz$. Para hallar Z, se realiza un ensayo del motor, en el que se lo alimenta con una tensión sinusoidal de 50Hz y 230V eficaces. Se obtienen los siguientes resultados:

- la fuente entrega una corriente de $4A$ eficaces.
- la potencia consumida a la fuente es de $850W$.

a) Hallar la reactiva que consume el motor durante el ensayo.

La expresión de la potencia activa en término de los fasores de tensión y corriente nos dice, en valores eficaces, que

$$P = re(V\bar{I}) = |V|.|I|.\cos(\varphi)$$

siendo φ el factor de potencia de la carga. De los datos,

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{|V|.|I|} = \frac{850W}{230V.4A} \Rightarrow \varphi = arcos\left(\frac{850}{230.4}\right)$$

nos quedamos con la solución positiva, ya que la impedancia es inductiva.

Ya podemos calcular la potencia reactiva:

$$Q = |V|.|I|.\sin(\varphi)$$

b) Hallar un modelo paralelo para Z ($Z = R_P||jX_P$).

El modelo paralelo $Z = R_P||jX_P$ podemos obtenerlo directamente de las potencias activa y reactiva. Sabemos que tanto R_P como X_P ven la tensión impuesta y cada una disipa, respectivamente, toda la activa y toda la reactiva. Entonces

$$P = \frac{|V|^2}{R_P} \quad , \quad Q = \frac{|V|^2}{X_P}$$

$$Z = R_P||jX_P = \frac{|V|^2}{P} + j\frac{|V|^2}{Q}$$

c) Si se quisiera compensar la reactiva consumida por el motor a la fuente, ¿qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría?

Para consumir la reactiva consumida por la carga, colocamos un condensador en paralelo con la carga, de forma que entregue la reactiva consumida. Se tiene que cumplir que $Q_C + Q = 0 \Rightarrow Q_C = -Q$. Sabemos que a la tensión del ensayo:

$$Q_C = -|V|^2.C\omega = -Q \Rightarrow C = \frac{Q}{|V|^2.2\pi.50Hz}$$