# Primer Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 28 de abril de 2018.

## Soluciones

**Ejercicio 1.** Se considera $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una transformación lineal dada por

$$T(x, y, z, w) = (x + 2z, 2\alpha y + 2z - w, \tfrac{1}{2}x + 3y - 5z, x + y - iz + 12iw),$$

donde $\alpha$ es un escalar. Dadas las siguientes afirmaciones, indique la opción correcta.

(A) $|\alpha| > 10 \Longrightarrow T$ es diagonalizable.

(B) $\alpha = xi$ con $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow T$ **no** es diagonalizable.

(C) $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow T$ **no** es diagonalizable.

(D) $\alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow T$ posee exactamente tres valores propios diferentes.

*Sugerencia: use el Teorema de Gerschgorin.*

**Solución**

La respuesta correcta es la (A).

Evaluando $T$ en la base canónica $\mathcal{C}$ tenemos, $T(1, 0, 0, 0) = (1, 0, \frac{1}{2}, 1)$ ; $T(0, 1, 0, 0) = (0, 2\alpha, 3, 1)$ ; $T(0, 0, 1, 0) = (2, 2, -5, -i)$ ; $T(0, 0, 0, 1) = (0, -1, 0, 12i)$.

La matriz asociada a $T$ es entonces, $\quad {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -i & 12i \end{pmatrix}$.

Los discos de Gerschgorin de $A$ son los siguientes:

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 2\},$$
$$\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 5| \leq 7/2\},$$
$$\mathcal{C}_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 12i| \leq 3\}$$

que resultan disjuntos dos a dos.

Si $|\alpha|$ es lo suficientemente grande, por ejemplo $|\alpha| > 10$, de modo que el disco $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2\alpha| \leq \frac{7}{2}\}$ sea disjunto a los otros tres discos, entonces $T$ tendría 4 valores propios diferentes y por lo tanto sería diagonalizable. Así, la opción correcta es la (A) y es claro que las otras opciones son incorrectas.

**Ejercicio 2.** Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un operador lineal no invertible, que verifica $rango(T - 3Id) = 3$, $-1$ es valor propio y $mg(-1) = 2$. Se consideran las siguientes tres afirmaciones

(i) $T$ es diagonalizable
(ii) $rango(T) = 3$
(iii) $tr(T) = 2$.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo las afirmaciones i) y ii) son correctas.

(B) Sólo las afirmaciones i) y iii) son correctas.

(C) Las afirmaciones i), ii) y iii) son correctas.

(D) Sólo la afirmación i) es correcta.

*Nota: la traza $tr(T)$ del operador $T$, es la traza de cualquier matriz que lo represente.*

**Solución**

La respuesta correcta es la (B).

Como el operador $T$ es no invertible, el 0 es valor propio. $rango(T - 3Id) = 3$ implica que $dimker(T - 3Id) = 1$ y por lo tanto 3 es valor propio con multiciplicidad geométrica $mg(3) = 1$. $-1$ es valor propio con $mg(-1) = 2$. Concluimos que $ma(0) = 1$, $ma(3) = 1$, $ma(-1) = 2$. Así, $trT = 0 + 3 - 1 - 1 = 1$. La opción (iii) es incorrecta.

Como las multiplicidades geométrica y algebraica son iguales para todos los valores propios, entonces $T$ es diagonalizable. Como $1 = mg(0) = dimker(T)$, se sigue que $rango(T) = 3$. Las opciones (i) y (ii) son correctas.

**Ejercicio 3.** Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por $T(x, y) = (-2x + y, -x)$. A continuación, indique la opción correcta.

(A) $T^{27}(1, 0) = (-28, -27)$

(B) $T^{27}(1, 0) = (-1, 0)$

(C) $T^{27}(1, 0) = (27, 0)$

(D) $T^{27}(1, 0) = (0, 27)$

*Ayuda: recuerde la identidad*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

**Solución**

La respuesta correcta es la (C).

**Ejercicio 4.** Se considera en $\mathbb{R}^2$ un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y $\|\cdot\|$ la norma inducida. Suponga que

$\|(1,0)\| = \sqrt{2}$

$\|(1,1)\| = 1$

$\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = [(1,1)]$

Determine cuál de las siguientes bases es ortonormal.

(A) $\{(0,1),(3,2)\}$.

(B) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(3,2)\}$.

(C) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3},0),(1,1)\}$.

(D) $\{\frac{1}{3}(1,-1),(1,1)\}$.

**Solución**

La respuesta correcta es la (C).

Por hipótesis, $\langle(1,0),(1,0)\rangle = \|(1,0)\|^2 = 2$, $\langle(1,1),(1,1)\rangle = \|(1,1)\|^2 = 1$ y $\langle(1,0),(1,1)\rangle = 0$. Escribimos los vectores de las alternativas como combinación lineal de la base $\{(1,0),(1,1)\}$ y calculamos los productos internos y las normas.

$\langle(0,1),(3,2)\rangle = \langle -(1,0)+(1,1),(1,0)+2(1,1)\rangle = -2+2 = 0$
$\|(0,1)\|^2 = \langle(0,1),(0,1)\rangle = \langle -(1,0)+(1,1), -(1,0)+(1,1)\rangle = 2+1 = 3$
$\|(3,2)\|^2 = \langle(3,2),(3,2)\rangle = \langle(1,0)+2(1,1),(1,0)+2(1,1)\rangle = 2+4 = 6$

Luego, la opción (A) es incorrecta, pero la opción (C) es correcta.

$\langle(\frac{1}{3},0),(1,1)\rangle = 0$ por hipóteis. $\|(\frac{1}{3},0)\|^2 = \langle(\frac{1}{3}(1,0),(\frac{1}{3}(1,0)\rangle = \frac{2}{9}$.

Así, $\|(\frac{1}{3},0)\| = \frac{\sqrt{2}}{3} \neq \sqrt{3}$, por lo tanto la opción (B) no es correcta.

$\langle(1,-1),(1,1)\rangle = \langle 2(1,0)-(1,1),(1,1)\rangle = -1$.

Luego, $(1,-1),(1,1)$ no son ortogonales y la alternativa (D) es incorrecta.

## **Ejercicio de desarrollo** (10 puntos)

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita.

1. Definir valor propio de $T$, subespacio propio de $T$ y transformación lineal diagonalizable.

2. Demuestre que si $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_r$ son valores propios dos a dos distintos y $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios anteriores, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.

**Solución**

1. Ver teórico
2. Ver teórico, Teorema 53.