

# Sistemas de Comunicación

## Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

18 de Diciembre de 2020

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1

La internet de las cosas ya es una realidad en Uruguay hace algunos años, con algunos despliegues de distintas tecnologías como LoRa o NB-IoT. El último en desembarcar al país es la empresa Sigfox, con su tecnología del mismo nombre. Como ingeniera en telecomunicaciones de una empresa dedicada al sensado remoto (sobre todo urbano, como ser contaminación sonora y del aire), se le encarga la evaluación de esta tecnología. Naturalmente, comienza estudiando el sentido uplink, por el cual los sensores comunican las medidas a la radiobase, pues es el más interesante para su empresa. En particular, le gustaría verificar si la promesa del representante comercial de Sigfox de 10km de cobertura puede ser cierta.

Desde un punto de vista técnico, Sigfox utiliza BPSK a 600 bps y una potencia total de transmisión de 24 dBm. Como pulso conformador se utiliza un SRRC con factor de rolloff  $\rho = 1/3$ . Cada transmisión consta de una carga útil de 12 bytes más 12 bytes de preámbulos (i.e. 24 bytes en total). A su vez, cuando un sensor envía una medida, elige tres frecuencias pseudo-aleatoriamente (401 canales de separados 100 Hz y centrados entre 920.780 y 920.820 MHz) y envía el mismo paquete repetido por las tres frecuencias. La radiobase está escuchando en todos los canales.

- ¿Cuántos canales no-solapados pueden existir como máximo?
- Realice el diagrama completo del par nodo-radiobase. En la etapa de recepción puede enfocarse en un único canal.
- ¿Cuál puede ser la máxima densidad espectral de potencia del ruido en recepción si el alcance es realmente de 10 km? Suponga que una probabilidad de error de bit de como máximo  $10^{-4}$  es necesaria. Además, para calcular la atenuación (en dB) podrá usar la siguiente fórmula empírica para entornos urbanos:

$$L(d, f) = 46.32 + 26.07 \log_{10} f + 33.77 \log_{10} d, \quad (1)$$

con  $d$  la distancia en kilómetros y  $f$  la frecuencia en MHz.

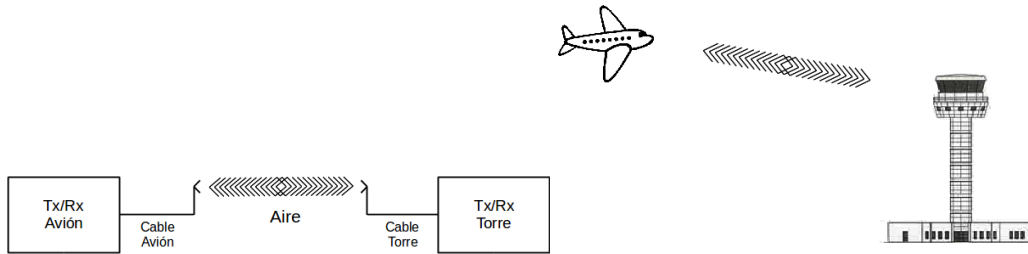
- Veamos si es posible aumentar un poco la densidad de potencia máxima hallada en la parte anterior utilizando el envío por triplicado. Suponiendo que la decisión sobre cada bit se hace por votación (i.e. si en dos o más de los tres canales la decisión fue 0, entonces la decisión final será 0; idem para 1), calcule la nueva densidad espectral de potencia máxima. Explícite y justifique las hipótesis necesarias en su cálculo.

- (e) El técnico de la empresa represente le indica que en recepción en realidad sí se utilizan las señales de los tres canales, pero a nivel de símbolos: se toman los tres símbolos recibidos, se realiza la suma, y con eso se toma la decisión. Calcule la nueva densidad espectral de potencia máxima, y nuevamente explicita y justifique las hipótesis necesarias en su cálculo.

## Problema 2

Se desea analizar el sistema de comunicación utilizado entre el piloto y la torre de control, cuando una aeronave está próxima a su destino. Este sistema opera en las frecuencias comprendidas entre 118 MHz y 136 MHz, en la banda de VHF, y utiliza modulación AM con canales cada 25 kHz.

Se modela el canal con dos tramos de cable entre los Tx/Rx y las antenas, uno de largo  $l^a$  en el avión y otro de largo  $l^t$  en la torre de control, y un tramo intermedio donde el medio de transmisión es el aire. Se considera que el ruido que se introduce en el canal es despreciable frente al de los receptores, el cual se modela como ruido AWGN con densidad espectral de potencia constante  $G(f) = N_0/2$ . La atenuación en potencia es  $\alpha_c^a$  y  $\alpha_c^t$  [dB/m], para los cables del avión y la torre respectivamente, mientras que la atenuación en el aire (descontando la ganancia de las antenas) se modela como:  $L_{aire}(d) = L_0 + \alpha_a(d-10)$ , con  $\alpha_a = 0.75$  dB/km y  $L_0 = 70$  dB.



Si bien actualmente las razones del uso de AM son más bien históricas, hay quienes sostienen que una de las ventajas frente a otras modulaciones es la posibilidad de escuchar cuando dos aviones transmiten en forma simultánea en el mismo canal.

- (a) Siendo  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  mensajes de dos aviones distintos, se tiene una señal recibida de la forma:  $x_c(t) = A_{c1}(1 + \mu x_1(t)) \cos(\omega_c t + \phi_1) + A_{c2}(1 + \mu x_2(t)) \cos(\omega_c t + \phi_2)$ . Hacer el diagrama fasorial de  $x_c(t)$  y escribir las componentes en fase y cuadratura.
- (b) Hallar la señal detectada por un demodulador sincrónico de AM cuando la fase del detector se sincroniza con la portadora de la señal 1. A partir del resultado obtenido, ¿usted cree que es posible escuchar ambos aviones simultáneamente? Justificar.

De ahora en adelante consideraremos un único avión transmitiendo a la torre, donde se utiliza un receptor basado en un detector sincrónico.

- (c) Hallar la relación señal a ruido en detección en la torre  $SNR_D(d)$ , cuando el avión se encuentra a una distancia  $d$  de la torre.
- (d) Si se desprecia la atenuación en los cables y asumiendo que la mínima  $SNR_D$  para tener un diálogo inteligible es de 10 dB y una altura de vuelo promedio de 10000m, calcular la mínima potencia de transmisión  $S_T$  para tener una cobertura de 50km alrededor de la torre. Para hacer el cálculo considerar los siguientes valores de los parámetros:  $\mu = 1$ ,  $S_x = 0.5$  (potencia del mensaje),  $N_0 = 10^{-13}$  W/Hz.

## Pregunta 1

1. Defina una fuente discreta y sin memoria.
2. Brinde la expresión de su entropía y una interpretación intuitiva de la misma.
3. Defina un canal binario, discreto y sin memoria.
4. Brinde una expresión para la mutua de ese canal y una interpretación intuitiva de la misma.

## Pregunta 2

1. Dar la expresión de la regla de Carson para la estimación del ancho de banda de la señal modulada en FM y explicar en qué se basa dicho cálculo.
2. Indicar cómo varía el ancho de banda en función del ancho de banda del mensaje  $W$ . Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si  $W$  aumenta como si disminuye.
3. Indicar cómo varía el ancho de banda en función de la constante de desviación en frecuencia  $f_{\Delta}$ . Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si  $f_{\Delta}$  aumenta como si disminuye.
4. Explicar la relación entre el ancho de banda de la señal modulada en FM y la relación señal a ruido en detección ( $SNR_D$ ). Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si el ancho de banda aumenta como si disminuye.

# Solución

## Problema 1

(a) El ancho de banda de cada canal será

$$B_T = r_s(1 + \alpha) = 600 \text{ bauds} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 800 \text{ Hz},$$

en tanto que el ancho de banda disponible para la transmisión será

$$B_{TOTAL} = 920820400 \text{ Hz} - 920779600 \text{ Hz} = 40800 \text{ Hz}.$$

Es posible entonces tener 51 canales no solapados.

(b) Ver figura 1.

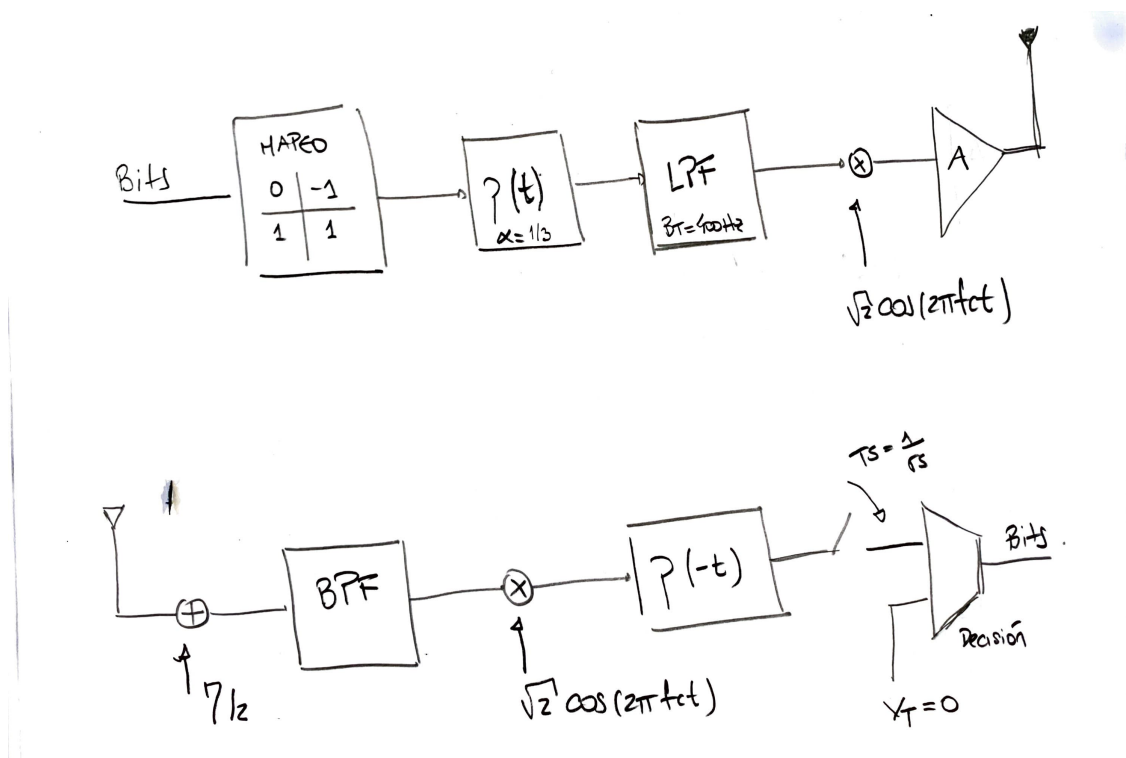


Figura 1: Diagrama completo del par nodo-radiobase.

(c) En una transmisión BPSK la probabilidad de error de bit es

$$P_{eb} = Q\left(\frac{\sqrt{E_S}}{\sqrt{L}\sigma}\right),$$

como transmitimos y recibimos con un SRRC se cumple que

$$\sigma^2 = \eta.$$

Por otro lado, como la relación entre la energía de símbolo y la potencia transmitida es  $S_T = E_S \cdot r_s$ , la letra nos pide cumplir con la siguiente desigualdad:

$$P_{eb} = Q\left(\frac{\sqrt{S_T}}{\sqrt{r_s \eta L}}\right) \leq 10^{-4},$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{\frac{S_T}{r_s \eta L}} \geq Q^{-1}(10^{-4}) \approx 3.72.$$

Calculamos ahora la atenuación  $L$  para el peor de los casos:

$$L_{dB} = 46.32 + 26.07 \log_{10}(920.820 \text{ MHz}) + 33.77 \log_{10}(10 \text{ km}) \approx 157.4 \text{ dB},$$

o lo que es lo mismo:

$$L \approx 10^{15.74} \approx 5.5 \times 10^{15}.$$

La letra nos dice que la potencia de transmisión son  $24 \text{ dBm}$ , o lo que es lo mismo

$$S_T = 10^{2.4} \text{ mW} \approx 251.2 \text{ mW}$$

Despejando obtenemos que:

$$\eta \leq \frac{0.2512}{(3.72^2) \cdot (5.5 \times 10^{15}) \cdot (600)} \approx 5.5 \times 10^{-21}.$$

(d) La probabilidad de error de bit en este caso estará dada por la probabilidad de que dos de los envíos estén errados a la vez, más la probabilidad de que los tres envíos los estén. Por lo tanto:

$$P'_{eb} = 3 \cdot P_{eb} \cdot P_{eb} \cdot (1 - P_{eb}) + P_{eb} \cdot P_{eb} \cdot P_{eb} = 3P_{eb}^2 - 2P_{eb}^3 \approx 3P_{eb}^2 \leq 10^{-4},$$

donde la aproximación se da porque asumimos que  $P_{eb}$  es muy pequeña

Finalmente:

$$\sqrt{\frac{S_T}{r_s \eta L}} \geq Q^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{-4}}{3}}\right) \approx Q^{-1}(0.0058) \approx 2.52$$

Y si volvemos a evaluar la ecuación de la parte anterior:

$$\eta \leq \frac{0.2512}{(2.52^2) \cdot (5.5 \times 10^{15}) \cdot (600)} \approx 1.2 \times 10^{-20}$$

Estamos asumiendo que, al ser lugares del espectro distintos, las transmisiones son independientes. Además, asumimos que la suma de distribuciones normales es normal.

(e) Este caso sería igual que nos anteriores, salvo que la ganancia máxima de la señal se multiplicará por tres y sucederá lo mismo con la potencia del ruido. Las ecuaciones quedan planteadas entonces de la siguiente manera:

$$P_{eb} = Q\left(\sqrt{\frac{3S_T}{r_s \eta L}}\right) \leq 10^{-4},$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{\frac{3S_T}{r_s \eta L}} \geq Q^{-1}(10^{-4}) \approx 3.72.$$

Despejando obtenemos que:

$$\eta \leq \frac{0.2512 \times 3}{(3.72^2) \cdot (5.5 \times 10^{15}) \cdot (600)} \approx 1.7 \times 10^{-20}.$$

Nuevamente estamos asumiendo que, al ser lugares del espectro distintos, las transmisiones son independientes. Además, asumimos que la suma de distribuciones normales es normal.

## Problema 2

(a) El diagrama fasorial de  $x_c(t)$  corresponde a un fasor para la señal 1 con ángulo  $\phi_1$  y módulo  $A_{c_1}$ , sumado al fasor de la señal 2, con ángulo  $\phi_2$  y módulo  $A_{c_2}$ . La descomposición en fase y cuadratura de la señal  $x_c(t)$  queda:

$$\begin{aligned}x_c^I(t) &= A_{c_1}(1 + \mu x_1(t)) \cos(\phi_1) + A_{c_2}(1 + \mu x_2(t)) \cos(\phi_2) \\x_c^Q(t) &= A_{c_1}(1 + \mu x_1(t)) \sin(\phi_1) + A_{c_2}(1 + \mu x_2(t)) \sin(\phi_2)\end{aligned}$$

(b) Al estar la fase sincronizada con la señal 1, ésta se detecta en forma correcta, mientras que para la señal 2, aparece un término de atenuación que corresponde justamente al coseno del desfase:

$$x_d(t) = A_{c_1} x_1(t) + A_{c_2} x_2(t) \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (2)$$

En cualquier caso sería posible escuchar a la señal 2, aunque sea atenuada, salvo en el caso límite de que el desfase entre las portadoras de señales recibidas sea exactamente  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ .

(c)

$$\begin{aligned}S_D(d) &= S_D^t(d) = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{L(d)} = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{(l^a \alpha_c^a + l^t \alpha_c^t + L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10))} \\N_D(d) &= N_D^t(d) = N_0 B_T \\SNR_D(d) &= SNR_D^t(d) = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{N_0 B_T (l^a \alpha_c^a + l^t \alpha_c^t + L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10))}\end{aligned}$$

(d) Para calcular la potencia de transmisión, el parámetro que debemos hallar es  $A_c$ , ya que para AM la potencia de transmisión es:

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} (1 + \mu^2 S_x)$$

A partir de las expresiones calculadas anteriormente, despejamos  $A_c$ :

$$A_c^2 = \frac{N_0 (L_0 + \alpha_a \cdot (d - 10)) B_T SNR_D^{\min}}{\mu^2 S_x}$$

Sustituyendo con los valores de  $SNR_D^{\min} = 10\text{dB}$  y  $d = \sqrt{50^2 + 10^2}$  se obtiene el valor de  $A_c$ . De esa forma llegamos a una potencia  $S_T = 712\text{ W}$ .

## Pregunta

Ver teórico.

## Pregunta

Ver teórico.