

# Sistemas de Comunicación

## Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

19 de febrero de 2019

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1

Un sistema de telemetría satelital envía continuamente imágenes tomadas desde su órbita, ubicada a una altura aproximada de 850 km. Cada imagen consta de 128 líneas, cada una de ellas conteniendo 2080 píxeles, y se envían dos líneas por segundo. Cada píxel corresponde a un único valor entre 0 y 1. Estos valores son alimentados a un conversor digital-analógico (que puede considerarse un interpolador ideal), el cual funciona (naturalmente) a una tasa de 4160 muestras por segundo.

Esta señal continua, cuya potencia es  $S_X = 0.5$ , es primero modulada en doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC) usando un oscilador de amplitud 1 y frecuencia 2.4 kHz, y el resultado es a su vez modulado en FM con una desviación máxima en frecuencia de  $f_\Delta = 17$  kHz y una frecuencia de portadora de  $f_c = 137.5$  MHz. El sistema de antenas y amplificación es tal que la señal enviada por el canal tiene una potencia de aproximadamente 10 W.

- Realice un diagrama del transmisor y estime el ancho de banda de la señal transmitida.
- Diseñe y realice el diagrama de un sistema de recepción que recupere la señal de las imágenes enviadas (no es necesario resolver el problema de re-armar las imágenes, es suficiente con recuperar la sucesión de píxeles). Especifique y justifique los parámetros involucrados en su diseño.

El objetivo del sistema de transmisión es que sea relativamente fácil de recibir por operadores amateurs. Por lo tanto, el sistema en recepción debería ser sencillo, y se toma como criterio de diseño una ganancia (en potencia) en la antena y amplificador receptor no mayor a 25 dB y ruido con densidad espectral de potencia  $N_0/2 = 0.5 \times 10^{-16}$  W/Hz (que se considerará AWGN), generado por el ruido electrónico en los equipos receptores (y por lo tanto se desprecia el del canal).

- Brinde un criterio para definir el alcance del sistema en las condiciones descritas antes. Calcúlelo y verifique si es suficiente, tomando en cuenta la órbita del satélite. Para estimar la atenuación en potencia del canal, puede considerarse como válida la fórmula de propagación en espacio libre:

$$L(d) = \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2, \quad (1)$$

con  $\lambda = c/f$  la longitud de onda ( $c \sim 3 \times 10^8$  m/s),  $f$  la frecuencia en Hz y  $d$  la distancia en metros.

- (d) Ahora suponga que el satélite se encuentra exactamente en el zenit (es decir, justo encima del receptor). ¿Con qué SNR se detectará la señal correspondiente a los píxeles? Asuma un receptor como el descrito en la parte anterior.

Quizá le haya llamado la atención el diseño del sistema de transmisión, con una combinación de DSB-SC y FM. En esta última parte justificaremos en parte esta elección.

Debido al movimiento relativo entre el satélite y el receptor se genera un corrimiento variable en la frecuencia percibida por este último. Este fenómeno se denomina efecto Doppler, y en este caso en particular las diferencias en frecuencias pueden ir variando entre  $-3\text{ kHz}$  y  $3\text{ kHz}$ . Es decir, y por ejemplo, en ambos casos extremos el receptor verá la señal satelital en  $137.497\text{ MHz}$  o  $137.503\text{ MHz}$  respectivamente.

- (e) Explique y justifique qué efecto tendría este fenómeno en el receptor, en particular en la señal luego del demodulador FM. Asuma que las variaciones en el corrimiento en frecuencia son suficientemente lentas como para considerarlo constante. ¿Qué efectos tendrá esto sobre la señal de píxeles detectada? ¿Modificaría en algo su diseño original?

## Problema 2

Se desea diseñar un sistema de comunicación digital para transmitir punto a punto un programa radial que consta de un conductor y cuatro “expertos” tratando temas de actualidad todas las mañanas. Se trata de cinco canales de audio independientes con rango dinámico  $[-1, 1]$ , potencia  $S_x = 1/2$  y ancho de banda  $W_x = 15\text{ kHz}$ . Se utiliza una frecuencia de muestreo  $f_s$  a determinar. Llamaremos a cada una de las señales  $x_i$  con  $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

En la figura 1, los bloques  $PCM_{SC}$  representan PCM binario de  $q$  niveles ( $n$  bits) con cuantización uniforme. El bloque  $MUX$  representa un multiplexor de división temporal (TDM) que multiplexa los bits de cada uno de los canales de audio, y el bloque  $QPSK$  representa al bloque modulador.

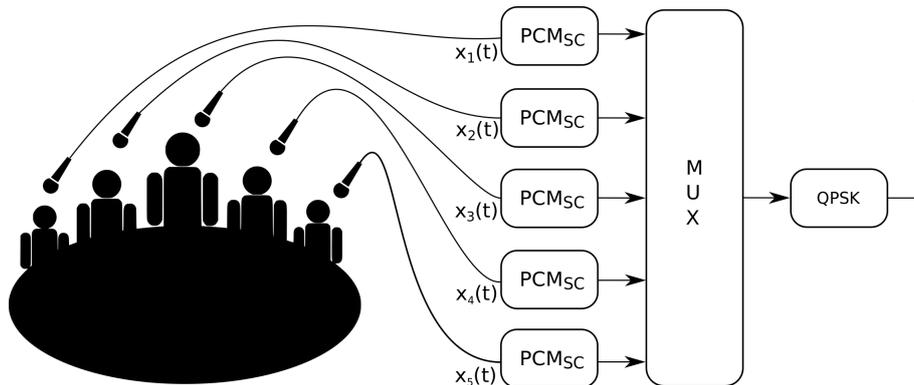


Figura 1: Digrama simplificado del sistema diseñado.

Se considera que los bits son independientes y equiprobables y se modulan mediante un modulador QPSK con pulso conformador de Nyquist de factor de roll-off 20%. El canal tiene atenuación  $L$  en potencia y ancho de banda  $BW = 500\text{ kHz}$ . Introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, con una densidad espectral de potencia  $\eta/2$ . La potencia de la señal transmitida es  $S_T$  y la frecuencia de la portadora es  $f_c$ . Se desea recibir cada señal con la máxima  $SNR_D$  posible.

- (a) Dar un diagrama de bloques del sistema tomando en cuenta transmisor, canal y receptor. Detalle los procesamientos PCM y QPSK, tanto en transmisión como en recepción. Especifique la constelación a utilizar y justifique.
- (b) Diseñar los parámetros del sistema ( $q$ ,  $n$ , frecuencia de muestreo  $f_s$ , duración de los pulsos  $T_s$ ) para cumplir los requerimientos indicados. Dar los criterios de elección utilizados.

- (c) Esbozar la densidad espectral de potencia de la señal conformada, tanto en fase como en cuadratura. ¿Qué características debe cumplir el pulso conformador  $p(t)$  para que no haya ISI? Enunciar el teorema de Nyquist.
- (d) Hallar una expresión para la probabilidad de error de bit y para la  $SNR_R$  en recepción.
- (e) Dar un criterio para que la  $SNR_D$  sea independiente del ruido introducido por el canal. Determinar la potencia transmitida  $S_T$  para que esta condición se cumpla.

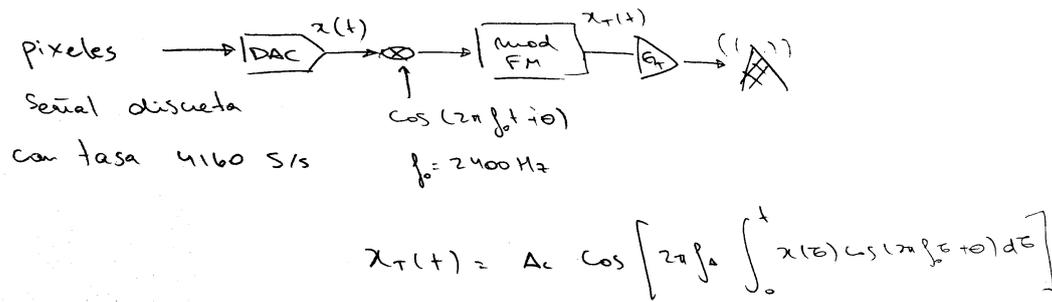


Figura 2: El diagrama del transmisor del ejercicio 1.

## Solución

### Problema 1

(a) El transmisor se puede ver en la figura 2. Notando como  $x(t)$  a la señal continua generada a partir de los píxeles, es importante notar que  $x(t) \in (0, 1)$  y tiene un ancho de banda de como máximo la mitad de la tasa de muestreo del conversor (por lo tanto 2080 Hz). La señal que entra al modulador FM es de la forma  $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$ , con  $f_0 = 2400$  Hz, y por lo tanto se encuentra en el intervalo  $(-1, 1)$  y tiene un ancho de banda de como máximo  $2400 + 2080 = 4480$  Hz. Habiendo establecido estos parámetros, podemos estimar el ancho de banda de la señal FM con cualquiera de los dos criterios usados en clase:

$$B_T = 2 \times 4480 \times (17000/4480 + 1) = 42.96 \text{ KHz (regla de Carson).} \quad (2)$$

$$B_T = 2 \times 4480 \times (17000/4480 + 2) = 51.92 \text{ KHz.} \quad (3)$$

Como comentario aparte, dado el origen de  $x(t)$ , el ancho de banda de  $x(t)$  usado en el cálculo es muy conservador, pues los píxeles sucesivos tienen una fuerte correlación entre ellos. De todas formas, se consideran ambas respuestas como correctas, pero se tomará el criterio de Carson en este caso al ser menor.

(b) Un posible receptor se muestra en la figura 3. En todos los casos, el sistema de recepción consta de un demodulador FM seguido de uno muy similar a un AM convencional. En el caso de la figura, se optó por bajar la señal recibida a bandabase y trabajar con las señales en fase y cuadratura. La frecuencia de portadora es naturalmente 137.5 MHz y el ancho de banda de los filtros pasabajos es  $B_T$  (de tal manera de dejar pasar la señal FM lo más completa posible, pero sin introducir ruido innecesariamente). Luego se demodula la señal en FM, que en este caso es básicamente derivar la fase de la señal compleja bandabase, y luego dividir entre  $2\pi f_\Delta$ .

En este punto se obtendría la señal modulada en DSB-SC, por lo que restaría bajar esta señal a banda-base (pues el ancho de banda de la señal, 2080 Hz, es menor a la frecuencia de la portadora, 2400 Hz). Aquí se puede usar tanto un detector de envolvente como uno síncrono. Si se usara el primero es importante mencionar que la señal original está entre 0 y 1, lo que hace que el detector de envolvente funcione sin problemas. Se optó de todas formas por el síncrono en el diagrama, pero con el cuidado de que algún sub-sistema se encargará de alinear la fase del oscilador de recepción con la señal recibida (notar que se usó como fase  $\theta$  tanto en transmisión como en recepción), algo innecesario en un detector de envolvente. En ambos casos hay que aplicar un filtro de ancho de banda igual al de la señal original:  $W = 2080$  Hz (en el caso del receptor síncrono, esto debería hacerse en pasabanda). Para recuperar los píxeles se debe muestrear esta señal a una tasa igual a 4160 muestras por segundo.

(c) El criterio de alcance en el caso del receptor de la figura 3 está en que el demodulador FM funcione por arriba del umbral. Es decir, aproximadamente una  $SNR_R$  mayor a 10. Si el sistema funciona muy por debajo de ese valor la señal que entra al demodulador síncrono estará muy distorsionada. Si la solución

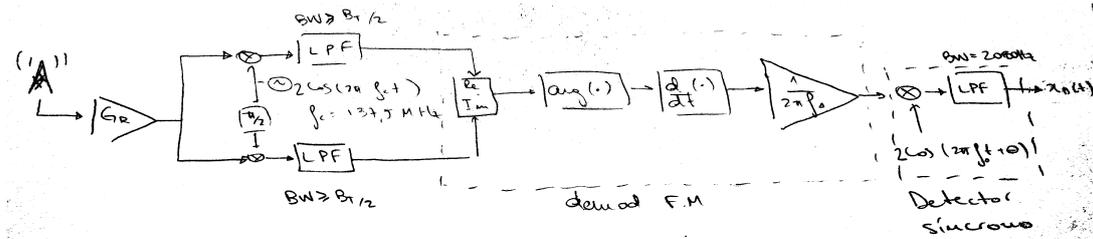


Figura 3: El diagrama del receptor del ejercicio 1.

brindada usa en la segunda etapa un detector de envolvente, se puede verificar que este último cumpla a su vez su umbral en la próxima parte.

En el caso de FM, la relación señal a ruido en recepción está dada por

$$SNR_R = \frac{P_T G_R}{L} \frac{1}{B_T N_0} \geq 10, \quad (4)$$

donde  $P_T = 10$  es la potencia de la señal transmitida, que multiplicada por la ganancia del receptor ( $G_R = 10^{2.5}$ ) y dividida entre la atenuación en potencia del canal ( $L$ ) nos indica la potencia de la señal que llega al demodulador FM. La potencia del ruido que entra al demodulador es la densidad espectral de potencia del ruido  $N_0 = 10^{-16}$  por el ancho de banda del filtro ( $B_T = 42.96$  kHz). Por lo tanto, planteando la condición de umbral y despejando la atenuación resulta en  $L < 7.36 \times 10^{13}$ , lo que a su vez resulta en  $d < 1490$  km. Esta distancia es menor a la altura del satélite, lo que abre la posibilidad de usar receptores con un mayor piso de ruido, con ganancias menores o recibir la señal en situaciones en las que el satélite no pase por el zenit.

(d) En este caso la distancia está dada por  $d = 850$  km. Por lo tanto, la atenuación de la señal transmitida es de  $L = 2.4 \times 10^{13}$  (o  $L = 133.8$  dB) lo que resulta en un potencia de recepción  $S_R = -98.8$  dBW (aproximadamente  $1.32 \times 10^{-10}$  W). Esta señal, junto con el ruido aditivo, es la que entrará al demodulador FM. El ruido a la salida del mismo no será constante en frecuencia, sino que tendrá la forma (ver teórico):

$$G_N(f) = \frac{f^2}{2f_{\Delta}^2 S_R} N_0. \quad (5)$$

Para recuperar el mensaje original estamos usando un demodulador síncrono, por lo que el ruido detectado corresponderá a la componente en fase del ruido pasabanda (entre 320 Hz y 4480 Hz). Por lo tanto, la potencia del ruido a la salida del detector síncrono será:

$$S_N = 2 \int_{f_0-W}^{f_0+W} \frac{f^2}{2f_{\Delta}^2 S_R} N_0 df = \frac{N_0}{3S_R f_{\Delta}^2} ((f_0 + W)^3 - (f_0 - W)^3) = 7.85 \times 10^{-5}. \quad (6)$$

Por lo tanto, la SNR en detección vale:

$$SNR_D = \frac{S_X}{S_N} = \frac{0.5}{7.85 \times 10^{-5}} = 6366. \quad (7)$$

Como suele suceder en FM, si la señal modulada es recibida por encima del umbral, el mensaje original es detectado con una SNR bastante más alta.

(e) Notemos como  $x_R(t)$  a la representación compleja bandabase de la señal pasabanda recibida por el sistema de demodulación FM. En principio, e ignorando el ruido, esta señal debe ser igual a la señal transmitida multiplicada por una constante representando las ganancias, además de una diferencia de fase que notaremos como  $\phi$  (debido básicamente a la diferencia entre osciladores en recepción y transmisión):

$$x_R(t) = \frac{G_R}{L} e^{j2\pi f_{\Delta} \int_0^t x(\tau) \cos(2\pi f_0 t + \theta) d\tau + j\phi}. \quad (8)$$

Visto en el plano complejo, es la señal transmitida girada un ángulo  $\phi$  y con la amplitud multiplicada por una constante. Si se toma en cuenta el error en frecuencia inducido por el efecto doppler, y notándolo como  $f_{\text{doppler}}$  (que en uno de los casos extremos mencionados en la letra valdría  $f_{\text{doppler}} = 3 \text{ kHz}$ ), la señal recibida ahora resulta:

$$x_R(t) = \frac{G_R}{L} e^{j2\pi f_{\Delta} \int_0^t x(\tau) \cos(2\pi f_0 t + \theta) d\tau + j(\phi + 2\pi f_{\text{doppler}} t)}. \quad (9)$$

Es decir, en el plano complejo las muestras estarán girando  $f_{\text{doppler}}$  más rápido que la señal original. Al entrar esta señal al demodulador FM, que básicamente deriva la fase y la divide entre  $2\pi f_{\Delta}$ , obtenemos una señal adicional a la original de la forma  $f_{\text{doppler}}/f_{\Delta}$ . Como en este caso en particular  $f_{\text{doppler}}$  es del orden de  $f_{\Delta}$ , esto significa que vamos a tener un valor constante sumado a la señal modulada en DSB-SC. Ahora bien, esta señal estará en la continua, y por lo tanto será eliminado por el demodulador sincrónico (o el detector de envolvente, si se aplicó como correspondía un filtro pasabanda), por lo que no hace falta cambiar nada en el receptor.

## Problema 2

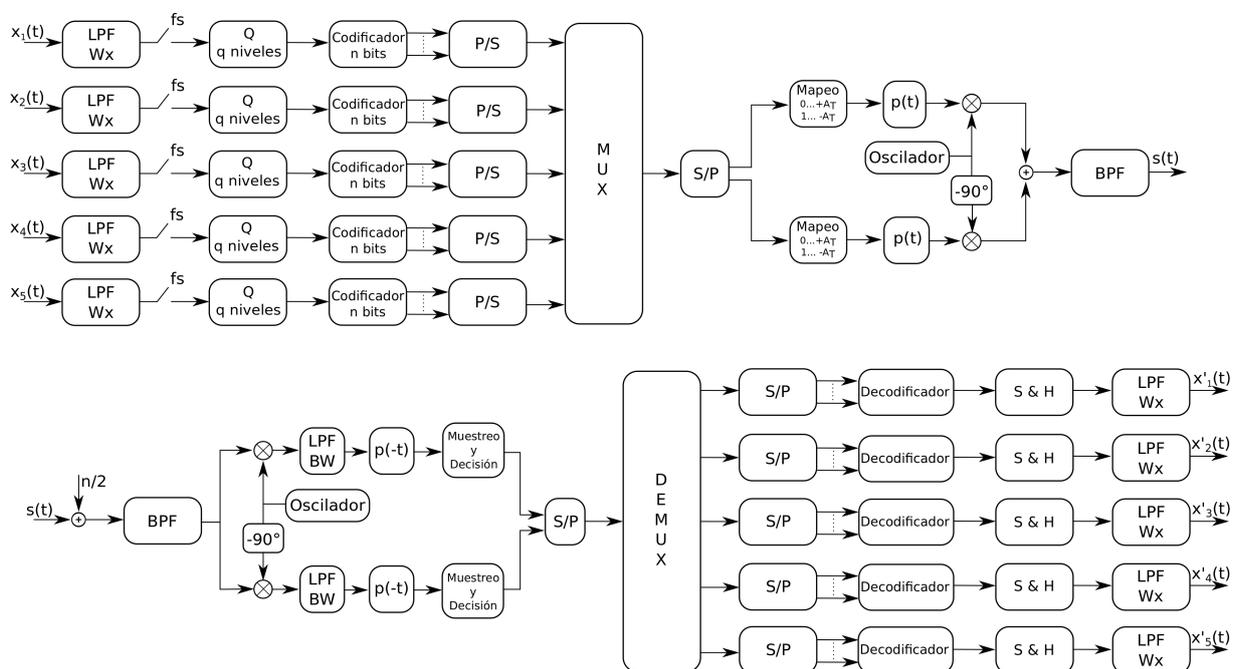


Figura 4: Digrama de bloques del sistema propuesto.

(a)

(b) Podemos relacionar el ancho de banda de transmisión con la tasa de símbolos  $T_s$  a partir de la siguiente ecuación:

$$BW = \frac{1}{T_s} (1 + \alpha) \quad (10)$$

donde  $\alpha$  es el factor de roll-off (20 % en este caso). Despejando obtenemos entonces que:

$$T_s = 2.4 \mu s. \quad (11)$$

Es posible ver que la relación entre la tasa de símbolos QPSK ( $r_s = 1/T_s$ ) y la tasa de bits en cada una de las cinco entradas del multiplexor ( $r_{sc} = 1/T_{sc}$ ) es

$$r_s = \frac{5}{2} r_{sc} \quad (12)$$

por lo que despejando obtenemos que

$$T_{sc} = 6 \mu s. \quad (13)$$

Por otro lado, tenemos las siguientes cotas para la frecuencia  $f_s$ :

$$r_{sc} \geq f_s n \geq 2nW_x, \quad (14)$$

donde por tratarse de un PCM binario.

$$q = 2^n \quad (15)$$

Debemos tomar algún criterio para definir  $q$ ,  $n$  o  $f_s$ ; luego quedará definido el resto de los parámetros. Ahora bien, la letra del ejercicio nos pide que la  $SNR_D$  sea máxima, y si asumimos que la probabilidad de error de bits en recepción ( $P_e$ ) es lo suficientemente pequeña, la  $SNR_D$  sólo dependerá del error de cuantización. Entonces:

$$SNR_D \approx 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W}, \quad (16)$$

y por lo tanto la manera de maximizarla es haciendo  $q$  lo más grande posible, y luego, también  $f_s$  lo más grande posible. Basado en lo anterior obtenemos los siguientes resultados:

$$n = 5 \quad (17)$$

$$q = 32 \quad (18)$$

$$f_s = 1/30 \text{ MHz} \approx 33.3 \text{ kHz} \quad (19)$$

(c) La densidad espectral de potencia de las señales conformadas en fase y cuadratura es la de la figura 5.

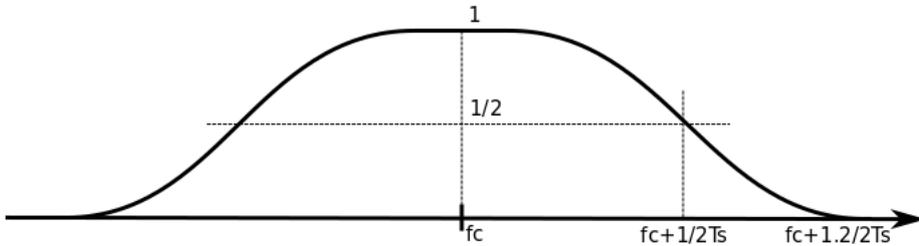


Figura 5: Densidad espectral de potencia de la señal conformada.

Sea  $p(t)$  el pulso conformador, la señal transmitida (ya sea en fase o cuadratura) tendrá la forma

$$x_t(t) = \sum_i a(i)p(t - iT_s), \quad (20)$$

y despreciando el efecto del canal, la señal luego del filtro apareado será

$$x_r(t) = \sum_i a(i)r_p(t - iT_s), \quad (21)$$

con  $r_p(\tau)$  la función de autocorrelación del pulso:

$$r_p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t - \tau)dt. \quad (22)$$

En este sentido, es posible ver que si en recepción se toman muestras cada  $t = kT_s$  segundos, no habrá ISI si la función de autocorrelación del pulso cumple la siguiente condición:

$$r_p(kT_s) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}. \quad (23)$$

Y esto, según el teorema de Nyquist, pasa si y sólo si

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_p\left(f + \frac{m}{T_s}\right) = T_s \quad (24)$$

con  $R_p(f)$  la transformada de Fourier de  $r_p(t)$ .

(d) La probabilidad de error de símbolo será igual a la suma de: la probabilidad de ocurrencia de cada símbolo por la probabilidad de elegir alguno de los otros tres incorrectos. Por tratarse de símbolos equiprobables la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos es  $\frac{1}{4}$ , y por como es la constelación en una modulación QPSK, el cálculo de probabilidad de elegir un símbolo incorrecto será el mismo en todos los casos. Por lo tanto:

$$Pe = 4 \times \frac{1}{4} \left[ 1 - \left( 1 - Q\left(\frac{A_R}{\sigma}\right) \right)^2 \right], \quad (25)$$

con símbolos recibidos tomando valores  $\pm A_R$  en fase y cuadratura ( $A_R = \frac{A_T}{\sqrt{L}}$ ), y  $\sigma$  la desviación estándar del ruido. Despreciando el término de segundo orden el resultado anterior puede ser aproximado por:

$$Pe \approx 2 \times Q\left(\frac{A_R}{\sigma}\right). \quad (26)$$

Como cada símbolo transmite dos bits, si asumimos codificación Gray la probabilidad de error de bit será exactamente la mitad que el resultado anterior, por lo tanto:

$$Peb \approx Q\left(\frac{A_R}{\sigma}\right). \quad (27)$$

Por otro lado, la  $SNR_R$  será la potencia de la señal recibida sobre la potencia del ruido, o lo que es lo mismo:

$$SNR_R = \frac{S_T}{L \cdot BW \cdot \eta} \quad (28)$$

(e) La  $SNR_D$  puede ser expresada de la siguiente manera:

$$SNR_D = \frac{3q^2}{1 + 4q^2 Peb} S_x. \quad (29)$$

Por lo tanto para que la  $SNR_D$  sea independiente del ruido introducido por el canal tenemos que poder asumir que  $4q^2 Peb \ll 1$ . Un criterio posible es por ejemplo:

$$Peb \leq 10^{-1} \frac{1}{100} = 0.001, \quad (30)$$

que despejando es equivalente a:

$$\frac{A_R}{\sigma} = \sqrt{\frac{T_s \cdot S_T}{L \cdot \eta}} \geq 3.1. \quad (31)$$

Y finalmente obtenemos una condición para la potencia de transmisión

$$S_T \geq \frac{3.1^2 \cdot L \cdot \eta}{T_s} \quad (32)$$