Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

19 de julio de 2019

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Ante la esperada llegada del VAR al campeonato uruguayo, la AUF está analizando la adquisición de equipamiento de comunicación para los árbitros, para lo cual requieren de su asesoramiento técnico. Se desea analizar y diseñar una solución de intercomunicadores para los árbitros, que permita la comunicación de voz entre ellos durante los partidos. El reglamento de FIFA define las dimensiones de las canchas, con un largo entre 90 y 120 metros, y un ancho entre 45-90 metros. A los efectos del análisis asumiremos que todos los árbitros están dentro del campo (i.e. también los árbitros del VAR).
Este sistema debe operar en la banda de UHF, en frecuencias libres sub-GHz comprendidas entre 920.4 MHz y 921.8 MHz. La modulación a utilizar será FM con una desviación de frecuencia $f_\Delta = 75$ kHz y una mínima SNR_D de 25 dB. La única atenuación a considerar es la del aire, la cual se modela en forma simplificada como: $L_{aire}(d) = L_0 + \alpha_a(d - 10)$, con $\alpha_a = 0.3$ dB/m y $L_0 = 50$ dB. Se desprecia tanto la ganancia de las antenas, así como otras pérdidas en cables y conectores. Además el amplificador de recepción introduce un ruido AWGN con $\eta_A = 10^{-15}$ W/Hz.

(a) Hallar el ancho de banda del audio máximo que se puede utilizar para tener 4 canales con una separación mínima de 200 kHz. Indicar el ancho de banda de la señal FM resultante para cada canal y las frecuencias centrales de los canales.

(b) Si se trabaja con un ancho de banda del audio de 10 kHz y una separación entre canales de 100 kHz ¿cuántos canales podrían operar en este caso?

En el proceso de diseño se define un ancho de banda de audio de $W = 15$ kHz y potencia $S_x = 0.5$. A partir de dichos parámetros se le encomienda el cálculo de la mínima potencia de transmisión necesaria.

(c) Hallar la máxima atenuación posible, dado el peor caso que podría darse en un campo de juego.

(d) Determinar la mínima potencia de transmisión para que el sistema opere correctamente.

Para evitar las fluctuaciones de volumen, la señal de audio de salida debe tener una potencia constante, sin importar la potencia trasmitida ni la distancia entre los equipos dentro del campo de juego. Para ello, se regula la amplitud de salida en A_0 cuando el mensaje es un tono de 1 kHz de amplitud unitaria.

(e) Explicar cómo se logra esto cuando se utiliza modulación FM, mostrando en el diagrama de bloques del receptor dónde se introduce el parámetro A_0.

(f) ¿Qué cambia cuando la modulación es AM y cómo se soluciona? Hacer el diagrama de bloques del receptor correspondiente, indicando cómo se utiliza el parámetro A_0 en este caso.

Problema 2

Se desea transmitir símbolos de una fuente binaria IID con bits equiprobables, generados a una tasa r. Para ello se utiliza un sistema de transmisión pasabanda BPSK con portadora $f_c = Kr$ (con $K >> 1$) y pulso de conformación rectangular NRZ. El canal de transmisión cumple las hipótesis usuales, con parámetros L y η.

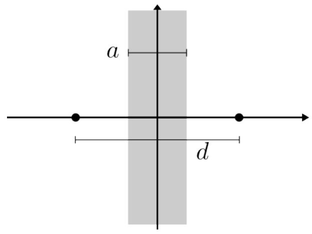
(a) Dar un diagrama de bloques completo de un receptor basado en un receptor de correlación. Explicar cualitativamente el funcionamiento del receptor y las hipótesis asumidas.

(b) Estimar el ancho de banda B_T y bosquejar el espectro de la señal transmitida.

(c) Hallar las componentes de señal y de ruido a la entrada del comparador en el receptor. Hallar a partir de ellas la probabilidad de error.

(d) Calcular la energía de bit E_b y expresar la probabilidad de error en funcion de E_b.

Se quiere evaluar cómo se afecta la probabilidad de error (P_e) cuando se utiliza decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección (ver la siguiente figura). Se define $\alpha = \frac{a}{d}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ donde d es la separación entre los símbolos en detección y a el ancho de la zona de borrado.



(e) Hallar las expresiones para P_e y la P_{bor} (probabilidad de borrado) como una función de E_b y α.

(f) Determinar el valor de α para que se cumpla que $P_{\text{bor}} = 2P_e$, suponiendo que $P_e = 10^{-5}$. Calcular la relación E_b/η para este caso.

Observación: La motivación para buscar $P_{\text{bor}} = 2P_e$ en la parte (f) viene dada porque generalmente un código corrector de errores, para una distancia de código dada, puede detectar el doble de los errores de los que puede corregir.

Solución

Problema 1

(a) Teniendo un ancho de banda total de 1.4 MHz, de los cuales 600 kHz quedan para la separación entre canales, se deduce que el ancho de banda máximo de cada canal debe ser $B_{max} = 800$ kHz$/4 =$ 200 kHz.
De allí se deduce cuál puede ser el máximo ancho de banda del audio a utilizar: $B = 2(D+2)W$ con $D = \frac{f_\Delta}{W}$, por lo que tenemos: $W_{max} = \frac{B_{max}-2f_\Delta}{4}$ con $B_{max} = 200$ kHz.
Despejando se tiene $W_{max} = 12.5$ kHz.
Las frecuencias centrales de los canales resultantes quedan 920.5 MHz, 920.9 MHz, 921.3 MHz y 921.7 MHz respectivamente.

(b) Ahora $W = 10$ kHz por lo que mediante $B = 2(f_\Delta + 2W)$ se llega a que $B = 190$ kHz.
Además el ancho de banda total aumenta a 1.1 MHz, ya que las separaciones suman un total de 300 kHz. De esa forma llegamos a un máximo de 5 canales (el cálculo da 5.79, por lo que el máximo posible es 5).

(c) El peor caso corresponde a la distancia máxima dentro de un campo de juego, las cuales se dan en las diagonales de extremo a extremo, considerando a su vez las máximas dimensiones posibles según FIFA, es decir largo de 120 metros y ancho de 90 metros.
Esto determina una distancia máxima en la diagonal de 150 metros, lo cual nos da una atenuación máxima de 92 dB.

(d) Para FM la SNR$_D$ está dada por $3D^2S_x\gamma$ siendo $\gamma = \frac{S_T}{\eta LW}$.
Despejando la potencia y haciendo el cálculo, llegamos a la condición $S_T \geq 200$ mW.
Además, es necesario cumplir el umbral de FM, dado por $SNR_R = \frac{S_T}{\eta LB} \geq 10$. De allí surge la condición $S_T \geq 3.3$ W.
Siendo la segunda condición más restrictiva, la potencia de transmisión mínima es $S_T = 3.3$ W.

(e) En la modulación FM, las variaciones en la potencia de la señal recibida no afectan directamente al mensaje, por lo cual no es necesario hacer un ajuste automático de la ganancia en el receptor. De todas formas, sí juega un papel en este sentido el limitador que se aplica a la señal en recepción, evitando la saturación de la salida cuando se producen picos en la señal recibida. Una vez detectado el mensaje, se amplifica en función de la constante del transmisor f_Δ y del parámetro A_0, para lograr la amplitud buscada.

(f) Para el caso de AM, las variaciones en la potencia de la señal afectan directamente al mensaje, por lo cual es necesario hacer un ajuste automático de la ganancia variable que se utiliza en el receptor. Para ello, se utiliza la potencia de la portadora en el receptor para estimar la ganancia necesaria, de manera de mantener una amplitud constante para el mensaje detectado.
En la práctica se ajusta la ganancia realimentando el valor de portadora a la salida de filtro de recepción, y es lo que se llama control automático de volumen.

Problema 2

(a) Luego recibir con un filtro pasabanda y bajar la señal a banda base, el receptor de correlación es como se muestra en la figura 1. La señal se multiplica por el pulso $p(t)$ con el que fue conformada y se integra en un tiempo de símbolo T. Este resultado es la entrada al comparador para decidir el símbolo, y el integrador vuelve a cero para hacer el cálculo del siguiente símbolo. En este caso el umbral óptimo es $\lambda = 0$ por ser codificación polar y bits equiprobables.

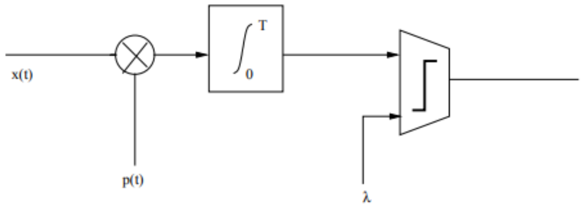


Figura 1: Receptor de correlación.

(b) La señal conformada x_c es de la forma,

$$x_c(t) = \sum_k a_k \cos(\omega_c t + \phi) p(t) = \left[\sum_k a_k p(t)\right] \cos(\omega_c t + \phi) = x_a(t) \cos(\omega_c t + \phi)$$

donde ϕ es la fase aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$, $p(t)$ es un pulso rectangular de duración $T = 1/r$ y a_k es una secuencia binaria equiprobable que toma los valores A y -A.
El espectro del proceso x_c está dado por,

$$G_c(f) = \frac{1}{4}(G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c))$$

mientras que el espectro de $x_a(t)$ se obtiene utilizando la conocida fórmula para el espectro de una señal PAM. En este caso la secuencia a_k tiene media nula y varianza A^2 por lo que se tiene que,

$$G_a(f) = A^2 r |P(f)|^2 = \frac{A^2}{r} sinc^2\left(\frac{f}{r}\right)$$

Para estimar el ancho de banda necesario el criterio de mantener más del 90 % de la energía corresponde con eliminar el espectro fuera del primer cero del $sinc^2$ y se tiene que $B_T = 2r$, por otro lado el criterio de poder detectar el pulso corresponde a cortar el $sinc^2$ en la mitad de su lóbulo principal y el ancho de banda en ese caso sería $B_T = r$.

(c) La señal recibida está dada por,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sum_k a_k p(t)\right] \cos(w_c t + \phi) + n(t)$$

donde $n(t)$ es el ruido que se introduce en el canal, y L es la atenuación sufrida por la señal en el canal. Como estamos en el caso de señalización polar equiprobable, tenemos que la probabilidad de error está dada por,

$$P_e = Q\left(\frac{|\hat{a_1} - \hat{a_0}|}{2\sigma}\right)$$

donde los $\hat{a_i}$ son los valores que tomaría la señal en el instante de muestreo en ausencia de ruido y σ es la varianza del ruido luego del integrador. Calcularemos primero los valores $\hat{a_i}$. Notar que dada la señalización estos toman valores opuestos, por lo que solo se calculará uno de ellos. Si la miramos en un intervalo del tipo $[kT, (k+1)T]$ el valor de $\hat{a_1}$ queda dado por:

$$\hat{a_1} = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{2A}{\sqrt{L}} \cos^2(w_c t + \phi)\, dt = \frac{AT}{\sqrt{L}}$$

ya que f_c es múltiplo de r. Ahora es necesario hallar la potencia del ruido en el instante de muestreo luego del integrador. Este está dado por:

$$N[k] = \int_{kD}^{(k+1)D} n(t) \cos(\omega_c t) dt.$$

De esto se puede ver que el ruido $N[k]$ es gaussiano pues es combinación lineal de variables aleatorias gaussianas. Además es inmediato ver que tiene media nula. Su potencia está dada por,

$$\mathbf{E}\left(N^2[k]\right) = \int_{kT}^{(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} R_n(t-t')\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t')\,dtdt'.$$

Pero sabemos que $R_n(\tau) = \eta\delta(\tau)$, de modo que

$$\mathbf{E}\left(n^2[k]\right) = \sigma^2 = \eta T$$

con lo que el proceso $N[k]$ queda caracterizado. Sustituyendo en la ecuación de la probabilidad de error tenemos,

$$P_e = Q\left(\frac{\frac{2AT}{\sqrt{L}}}{2\sqrt{\eta T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{\eta L}}\right).$$

(d)

$$E_b = \int_0^T \left(\frac{A}{\sqrt{L}}\cos(w_c t)\right)^2 dt = \frac{A^2T}{2L}$$

por lo que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q(k)$$

con

$$k = \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}$$

(e)

$$P_e = p_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 + a/2}{\sigma}\right) + p_0 Q\left(\frac{a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d/2 + a/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{(1+\alpha)\,d}{2\sigma}\right) = Q\left((1+\alpha)\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q\left((1+\alpha)\,k\right)$$

$$P_{\text{bor}} = 1 - P_e - P_{\text{correcto}}$$

$$P_{\text{correcto}} = p_1\left(1 - Q\left(\frac{\hat{a}_1 - a/2}{\sigma}\right)\right) + p_0\left(1 - Q\left(\frac{-a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right)\right) = 1 - Q\left((1-\alpha)\,k\right)$$

$$P_{\text{bor}} = -Q\left((1+\alpha)\,k\right) + Q\left((1-\alpha)\,k\right)$$

(f)

$$P_e = 10^{-5} \Rightarrow (1+\alpha)\,k = Q^{-1}\left(10^{-5}\right) = 4.3$$

$$P_{\text{bor}} = 2P_e = 2.10^{-5} \Rightarrow (1-\alpha)\,k = Q^{-1}\left(3.10^{-5}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{4.3}{4} = 1.075 \Rightarrow \alpha = 0.0361$$

$$k = 4.15 \Rightarrow E_b/\eta = 8.6$$