Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

20 de Julio de 2018

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Una empresa importadora le encarga el análisis de *walkie-talkies* de alta gama que está evaluando comenzar a comercializar en el mercado. Éstos son equipos que digitalizan la voz y envían la señal de manera inalámbrica para que todo equipo en la misma frecuencia la reciba. La idea, en una primera instancia, es realizar un análisis teórico para ver si algunas de las características que el equipo promete pueden ser reales.

Con una rápida lectura del manual de instrucciones verifica que se trata de un sistema que convierte el audio de análogico a digital (y viceversa) a 8000 muestras por segundo, con una profundidad de 8 bits por muestra sin ningún tipo de compresión. A su vez, en transmisión se trata de un sistema QPSK centrado en la banda entre 462 y 462.5 MHz, con diez canales en total (el canal que usa el equipo es seleccionable). La potencia máxima del transmisor es de 1 W.

(a) Realice un diagrama del sistema completo, incluyendo tanto el transmisor como el receptor.

(b) La caja del equipo tiene un cartel destacado con el mensaje **Sonido Puro y Cristalino** y menciona una SNR de 50 dB. ¿A qué SNR se refiere? Justifique matemáticamente porqué este valor es posible.

(c) ¿Qué factor de roll-off habrá usado el fabricante para el pulso conformador? Halle los valores posibles dados los parámetros descritos antes y justifique cuál hubiera elegido usted.

(d) Otro cartel en la caja indica **Alcance de más de 500 m!**. ¿Qué criterio usaría usted para definir alcance? ¿Qué condición debe cumplir el ruido presente en el demodulador para lograr este alcance? En el contexto de este estudio teórico, puede usar la fórmula de propagación en vacío para calcular la atenuación en potencia del canal:

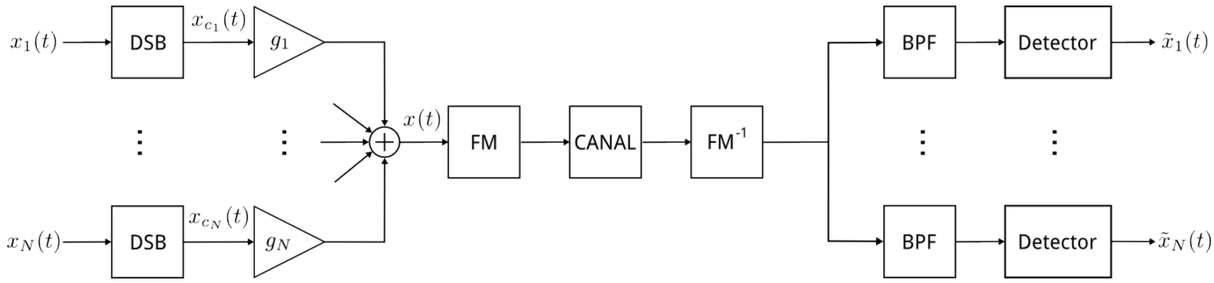
$$L(d) = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2, \tag{1}$$

con $\lambda = c/f$ la longitud de onda ($c \sim 3 \times 10^8$ m/s) y d la distancia en metros.

(e) Al tiempo de terminar su informe, el mismo fabricante saca una versión mejorada de su modelo, que promete mayor alcance sin aumentar la potencia de transmisión ni sacrificar calidad de audio. ¿Es esto posible? Explique cómo podría haber realizado esta mejora el fabricante.

Problema 2

Se considera el transmisor y el receptor de la figura, donde N mensajes $x_i(t)$ independientes, de ancho de banda W y de potencia media P_x se transmiten multiplexados en frecuencia. Se modulan en DSB sobre subportadoras $f_{c_i} = (2i-1)W$ con $i = 1 \ldots N$, todas con igual potencia S_{DSB}. Luego la suma de todas ellas se modula en frecuencia con portadora $f_c \gg 2NW$, constante de desviación de frecuencia f_Δ y potencia de transmisión S_T. El canal tiene una atenuación en potencia L e introduce ruido AWGN con DEP $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ referido a la entrada del receptor. Las ganancias en potencia g_i deben cumplir $S_{\text{DSB}} \sum_i g_i = S_x$, donde $x(t)$ es la señal antes del modulador FM.



(a) Hallar el máximo número $N_{\max}$ de canales que se puede transmitir si se requiere una relación señal a ruido a la salida del demodulador FM igual o mayor a SNR_{FM}.

(b) Calcular $N_{\max}$ para los valores de los parámetros indicados al final del problema. Hallar el ancho de banda utilizado en la transmisión en este caso.

(c) Hallar la SNR_D^i para cada señal $x_i(t)$. Verificar que el resultado es de la forma:

$$\text{SNR}_D^i = \frac{K g_i}{i^3 - (i-1)^3}$$

siendo K una constante que depende de los parámetros fijos del sistema.

A continuación se estudia una alternativa para elegir las ganancias g_i. Se busca evaluar la capacidad total del canal, considerando ésta como la suma de las capacidades en cada uno de los canales del sistema.

(d) Hallar las ganancias g_i para que la relación señal a ruido en cada canal sea la misma. Hallar dicha SNR y expresar la capacidad total del canal para este caso.

Datos: $W = 8$ kHz, $P_x = 1$, $S_{\text{DSB}} = 400$ mW, $f_c = 100.0$ MHz, $f_\Delta = 75$ kHz, $S_T = 30$ W, $S_x = 1/2$, $L = 20$, $\eta = 10^{-7}$ W/Hz, $\text{SNR}_{\text{FM}} = 30$ dB.

Pueden ser útiles las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

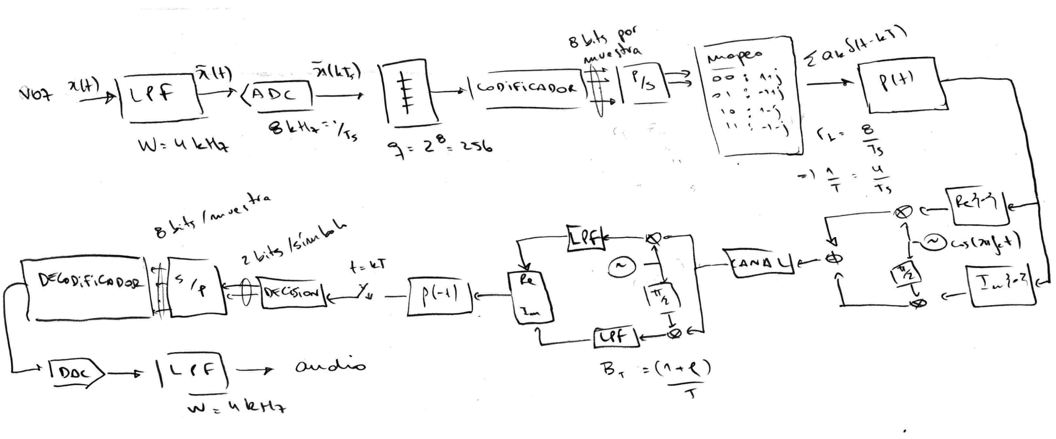


Figure 1: El diagrama del sistema del ejercicio 1.

Solución

Problema 1

(a) El diagrama se puede ver en la figura 1. El único comentario que vale la pena destacar, es que el bloque "CODIFICADOR" genera 8 bits por muestra, y el bloque marcado como "P/S" toma parejas de esos ocho bits y los va sacando serial, de manera que el bloque de mapeo QPSK reciba de a dos bits.

(b) Naturalmente, dado que se refiere a la calidad del audio, la caja habla del SNR en detección (SNR_D). En este caso, tomemos el mejor caso para la SNR_D, suponiendo que la única distorsión presente es debido a la cuantización. En ese caso vale la igualdad:

$$SNR_D = \frac{S_x}{E_{\max}^2} 3q^2 \frac{f_s}{2W}, \tag{2}$$

suponiendo la mejor situación sería $S_x = 1$ y $E_{\max} = 1$. Con una tasa de muestreo de $8\,\mathrm{kHz}$, poco se puede sobremuestrear, por lo que supondremos $2W = f_s = 8\,\mathrm{kHz}$ (se podría filtrar con un W ligeramente menor que $f_s/2$, lo que se consideraría correcto siempre que no se consideren valores demasiado bajos). Por lo tanto resulta $SNR_D = 3 \times 256^2 = 197 \times 10^3 = 53\,\mathrm{dB}$. Este valor incluso permite tener una $S_x = 0.5$, lo que sería más razonable en el análisis.

(c) Para encontrar el factor de roll-off es necesario hallar el ancho de banda que puede ocupar la señal transmitida. En este caso disponemos de $500\,\mathrm{kHz}$ para 10 canales, lo que nos da $50\,\mathrm{kHz}$ por canal de voz. A su vez, tenemos una tasa de símbolos igual a $1/T = f_s \times 8/2 = 32\,\mathrm{kHz}$ (donde el divido dos proviene de estar usando constelación QPSK). Como se trata de un sistema pasabanda, la señal ocupará $(1+\rho)/T$ Hz, por lo que ρ puede ser cualquier valor entre 0 y 0.56.
Generalmente es recomendable usar un factor de roll-off no demasiado pequeño para evitar tener que implementar un sistema de sincronismo temporal demasiado preciso, además de poder acortar los filtros conformadores de transmisión y el apareado de recepción. Estos dos efectos son debido a que cuanto mayor el ρ, más rápido cae a cero el pulso. Por todo lo anterior, habría que usar un $\rho = 0.5$.

(d) El alcance de este sistema será cuando el ruido de decodificación comience a hacerse notar. Esto es básicamente el umbral PCM, que en este caso será cuando deje de cumplirse que $P_{eb} << 1/4q^2$. Por lo tanto, y tomando $P_{eb} = 0.1/4q^2$ como criterio, se dará cuando el error de bit sea igual a 3.8×10^{-7}. Veamos a qué distancia se logra esta probabilidad de error.
Primeramente, a $500\,\mathrm{m}$ y con una frecuencia central de $462\,\mathrm{MHz}$ la atenuación resulta $L(500) = 93 \times 10^6 = 79.7\,\mathrm{dB}$. Segundo, la potencia en QPSK es igual a $2A^2/2T$, donde A es la coordenada de todos los símbolos, por ejemplo $A + jA$ o $-A + jA$ (el dividido dos proviene de subir a pasabanda con $\cos(2\pi f_c t)$

y $\sin(2\pi f_c t)$). Por lo tanto, en este caso, donde la potencia es 1 W, vale $A = 5.6 \times 10^{-3}$. Y por último, la probabilidad de error de bit, suponiendo ruido blanco gaussiano aditivo, es igual a $1-(1-Q(A/\sqrt{L\sigma^2}))^2 \sim 2Q(A/\sqrt{L\sigma^2})$ con $\sigma^2 = N_0$ en este caso por tratarse de un sistema pasabanda (notar que esto se podría pensar como una deducción de la fórmula $P_e = 1-(1-Q(\sqrt{E_s/LN_0}))^2$, cierta para QPSK).
En todo caso, la probabilidad de error de bit, considerando que se usa codificación de Gray, resulta entonces $P_{eb} = P_e/2$ y por lo tanto despejamos

$$7.63 \times 10^{-7} = 2Q\left(\frac{5.6 \times 10^{-3}}{\sqrt{93 \times 10^6 N_0}}\right) \Rightarrow 4.94 = \frac{5.6 \times 10^{-3}}{\sqrt{93 \times 10^6 N_0}} \Rightarrow N_0 = 1.37 \times 10^{-14}. \quad (3)$$

Éste es el máximo valor de densidad espectral de potencia que toleraría el sistema a 500 m de distancia. Más allá de la respuesta para el examen, son unos -140 dB, lo que impresiona como muy pequeño.

(e) Dado que el alcance está dado por la probabildad de error, la única solución es disminuyendo la misma sin cambiar la potencia de transmisión. Una posibilidad es tratar de bajar la tasa de transmisión. Pero aquí el problema es cómo bajar la tasa de transmisión sin disminuir la calidad del audio en detección. Una posibilidad es usar alguna técnica predictiva de tal manera de disminuir el rango dinámico de la señal a cuantizar. Ahora, dado que se busca la misma calidad de audio, se pueden disminuir los niveles necesarios en el cuantizador y por lo tanto disminuir la tasa de símbolos.

Problema 2

(a) La SNR_D para nuestro transmisor FM es:

$$\mathrm{SNR}_D = 3D^2 S_x \gamma \text{ con } \gamma = \frac{S_T}{\eta L W_x} \text{ y } W_x = 2NW$$

Así, tenemos que:

$$\frac{3D^2 S_x S_T}{\eta L 2NW} \geq \mathrm{SNR}_{\mathrm{FM}}$$

siendo

$$D = \frac{f_\Delta}{W_x} = \frac{f_\Delta}{2NW}$$

De esta ecuación es posible despejar N:

$$N^3 \leq \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta L 8W^3 \mathrm{SNR}_{\mathrm{FM}}}$$

Llamemos N_1 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Todo esto es válido si estamos trabajando sobre el umbral de FM, por lo que debemos imponer esta condición:

$$\mathrm{SNR}_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \geq 10$$

donde

$$B_T = 2(D+2)2NW = 2\frac{f_\Delta + 4NW}{2NW}$$

De esta condición es posible despejar N:

$$N \leq \frac{S_T - 20\eta L f_\Delta}{80\eta L W}$$

Llamemos N_2 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Entonces, dado que es necesario que se cumplan ambas condiciones, el máximo número de canales que se pueden transmitir queda:

$$N_{\max} = \min\{N_1, N_2\}$$

(b) El valor de D es entonces:

$$D = \frac{f_\Delta}{2N_{\max}W}$$

Según el valor que tome D tenemos que el ancho de banda resulta ser:
$B_T = 2f_\Delta$ si $D \gg 1$
$B_T = 4N_{\max}W$ si $D \ll 1$
$B_T = 2(D+2)2N_{\max}W$ si $D \in [1, 10]$

```
>> (3*(75000)^2*0.5*30/(10^-7*20*(2*8000)^3*10^3))^(1/3) = 3.14
```

```
>> (30-20*10^-7*20*75000)/(80*10^-7*20*8000) = 21.09
```

Tenemos que $N_1 = 3$ y $N_2 = 21$, por lo tanto el máximo es:

$$N_{\max} = 3$$

En este caso D queda:

```
>> D = 75000/(2*3*8000) = 1.5625
```

En este caso el ancho de banda de transmisión queda:

$$B_T = 2(D+2)2N_{\max}W = 342 \text{ kHz}$$

```
>> 2*(75000/(2*3*8000)+2)*2*3*8000 = 342000
```

(c) Ambas, SNR_R y SNR_D, son iguales para cada canal por ser DSB.
La potencia del ruido detectado en el canal i es:

$$N_D^i = 2\int_{2(i-1)W}^{2iW} \frac{\eta f^2}{2S_R} = \frac{\eta W^3}{3S_R}((2i)^3 - (2i-2)^3)$$

La potencia de la señal detectada en el canal i es:

$$S_D^i = f_\Delta^2 g_i S_{\text{DSB}}$$

Por lo tanto:

$$SNR_R^i = \text{SNR}_D^i = \frac{3S_T f_\Delta^2 g_i S_{\text{DSB}}}{\eta L(2W)^3(i^3 - (i-1)^3)}$$

(d) Deseamos que para todo i, j se cumpla $SNR_D^i = SNR_D^j$, esto implica:

$$g_1 = \frac{g_i}{i^3 - (i-1)^3} = \frac{g_j}{j^3 - (j-1)^3}$$

Además las ganancias deben cumplir:

$$S_{\text{DSB}} \sum_i g_i = S_x$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} g_1(i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^{N} g_i = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

De donde podemos despejar g_1:

$$g_1 \sum_{i=1}^{N}(i^3 - (i-1)^3) = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

$$g_1 \sum_{i=1}^{N}(i^3 - (i-1)^3) = g_1(1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + ... + (N-1)^3 - (N-2)^3 + N^3 - (N-1)^3) = g_1 N^3$$

$$g_1 = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

También podemos despejar g_1 utilizando las fórmulas de las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} (3i^2 - 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{N} i^2 - 3\sum_{i=1}^{N} i + N = 3\frac{N(N+1)}{2} - 3\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + N = N^3$$

De esta forma se calcula g_i para un i genérico:

$$g_i = \frac{S_x(i^3 - (i-1)^3)}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

Entonces la relación señal a ruido es la misma para cada canal y queda:

$$\text{SNR}_D^i = \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 (2W)^3}$$

La capacidad total del canal para este caso queda:

$$C = \sum_i C_i = \sum_i W \log_2(1 + SNR_D^i) = NW \log_2 \left(1 + \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 (2W)^3}\right)$$