

# Sistemas de Comunicación

## Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1

Un sistema de comunicación binario utiliza las señales equiprobables  $s_0(t)$  para transmitir 0 y  $s_1(t)$  para transmitir 1. Las señales se definen como:

$$s_0(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad s_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq aT_b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde  $0 \leq a \leq 1$ . El canal cumple con las hipótesis usuales agregando ruido AWGN con densidad espectral de potencia (DEP)  $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ .

- Determinar la energía de bit ( $E_b$ ).
- Determinar la energía de la diferencia de los pulsos ( $E_d$ ).
- Dar el diagrama del receptor si se utiliza un filtro apareado, especificando todos sus parámetros y explicar su funcionamiento. Bosquejar la salida del filtro apareado cuando se recibe la cadena binaria 101.
- Calcular la probabilidad de error en función  $\frac{E_b}{\eta}$  y  $a$  si el umbral es óptimo, no se presenta interferencia intersimbólica y se utiliza el filtro diseñado en la sección anterior.
- Se quiere que la probabilidad de error  $P_e$  no sea superior a  $10^{-5}$ . Calcular los valores posibles de  $a$  de manera que  $\frac{E_b}{\eta}$  sea 16dB.

Se quiere evaluar como es afectada la probabilidad de error ( $P_e$ ) cuando se utiliza la modulación anterior con decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección. Asuma que los símbolos son equiprobables y que el ancho de la zona de borrado es  $2m$ , centrado en el umbral óptimo  $V_T$ .

- Hallar las expresiones para  $P_e$  y la  $P_{\text{bor}}$  (probabilidad de borrado) como una función de  $a$  y  $m$ .
- Determinar el valor de  $m$  para que se cumpla que  $P_{\text{bor}} = 2P_e$ , suponiendo que  $P_e = 10^{-5}$ .

## Problema 2

Se desea diseñar un micrófono inalámbrico para espectáculos en salas de teatro. El micrófono debe operar en la banda de UHF y trabajar con modulación en frecuencia (FM). La banda asignada para operar es [790 - 800] MHz y se debe mantener una guarda de 10 kHz entre canales. La señal de audio a transmitir tiene ancho de banda  $W = 15$  kHz y potencia  $S_x = 1$ . Se transmite con potencia de transmisión  $S_T$  y la desviación en frecuencia  $f_\Delta$  debe estar en el rango [15, 45] kHz. El medio de transmisión es el aire, por lo que se considera el siguiente modelo de canal:

- Ruido AWGN con densidad espectral de potencia constante:  $G(f) = \eta/2$ , con  $\eta = 10^{-13}$  mW/Hz
- Atenuación (dB):  $L(d) = L_0 + \alpha d$ , con  $\alpha = 0.25$  dB/m y  $L_0 = 50$  dB

Se considera que el receptor es ideal, es decir que el mismo no introduce ruido y tiene ganancia  $g = L(d)$  siendo  $d$  la distancia entre el receptor y el transmisor (ver figura 1a para el caso de un micrófono).

- (a) Diseñar  $f_\Delta$  de manera de maximizar el número de canales dentro de la banda asignada. Calcular el ancho de banda de cada canal  $B$  y el número total de canales  $n_C$ .
- (b) Hallar la potencia de ruido en recepción  $N(d)$  cuando el transmisor se encuentra a una distancia  $d$ . Hallar la relación señal a ruido en detección correspondiente  $\text{SNR}_D(d)$ .

En recepción es necesario trabajar con audio de alta fidelidad, para lo cual se debe tener una  $\text{SNR}_D$  mayor a 50 dB.

- (c) Calcular la mínima potencia de transmisión  $S_T$  para tener audio de alta fidelidad en recepción.

Cuando se trabaja con varios micrófonos se utilizan en simultáneo varios canales dentro de la banda. En este caso es necesario tener consideraciones adicionales para garantizar la compatibilidad entre las comunicaciones simultáneas. Además, para combinar las señales de audio se debe tener en cuenta la  $\text{SNR}_D$  de cada uno de los micrófonos y la potencia de las señales de audio recibidas.

Asumir que se trabaja con dos micrófonos como se muestra en la figura 1a.

- (d) ¿Cuál es la máxima relación (diferencia en dB) entre las  $\text{SNR}_D$  de ambos que puede ocurrir con la misma  $S_T$ ?
- (e) ¿Existe diferencia entre las potencias de las señales de audio recibidas?

El uso de modulación FM puede motivar el uso de filtros de preénfasis y deénfasis. En este caso se considera el uso de los filtros de la figura 1b.

- (f) Justificar su uso y analizar cualitativamente su funcionamiento.
- (g) Bosquejar la densidad espectral de potencia del ruido antes y después del filtro  $H_{DE}$ .

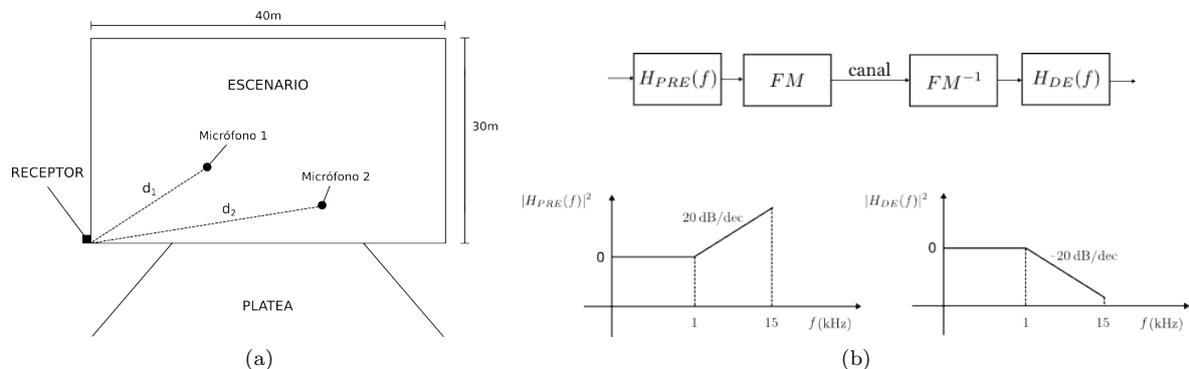


Figura 1

# Solución

## Problema 1

(a) Por ser equiprobables:

$$E_b = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{T_b} A^2 dt + \int_0^{aT_b} A^2 dt\right)$$

$$E_b = \frac{A^2 T_b}{2}(1 + a)$$
(1)

(b) La diferencia de pulsos:

$$d(t) = s_1(t) - s_0(t)$$
(2)

La energía de la diferencia de pulsos

$$E_d = \int_{-\infty}^{\infty} d^2(t) dt$$

$$= \int_0^{T_b} (s_0^2(t) - 2s_0^2(t)s_1(t) + s_1^2(t)) dt$$

$$= \int_0^{T_b} A^2 dt - 2 \int_0^{aT_b} A^2 dt + \int_0^{aT_b} A^2 dt$$

$$E_d = A^2 T_b (1 - a)$$
(3)

(c)

$$h(t) = k(d(T_b - t)) = k(s_1(T_b - t) - s_0(T_b - t))$$
(4)

eligiendo  $k = 1/(A^2 T_b)$  por conveniencia.

$$h(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq (1-a)T_b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Instante de muestreo óptimo:  $T_b$

Umbral de decisión:  $V_T = \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_0}{2}$

Con  $\hat{a}_1 = s_1(t) * h(t)|_{T_b}$

$\hat{a}_0 = s_0(t) * h(t)|_{T_b}$

(d)

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)$$
(5)

$$E_b = \frac{A^2 T_b}{2}(1 + a) \quad \text{y} \quad E_d = A^2 T_b (1 - a)$$
(6)

Entonces,

$$E_d = 2E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}$$
(7)

Por lo tanto,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}}{\eta}}\right)$$
(8)

(e)

$$\begin{aligned}
P_e &\leq 10^{-5} \\
Q\left(\sqrt{\frac{E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}}{\eta}}\right) &\leq 10^{-5} \\
Q\left(\sqrt{\frac{E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}}{\eta}}\right) &\geq 4.3 \\
a &\leq 0.37
\end{aligned} \tag{9}$$

(f)

$$\begin{aligned}
P_e &= P_0 \int_{-\infty}^{V_T-m} p_N(y - \hat{a}_0) + P_1 \int_{V_T+m}^{\infty} p_N(y - \hat{a}_1) \\
P_{\text{borr}} &= 1 - P_{\text{correcto}} - P_e
\end{aligned} \tag{10}$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= 0 \\
\hat{a}_0 &= 1 - a \\
V_T &= \frac{1 - a}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_e &= P_0 \int_{-\infty}^{V_T-m} p_N(y - \hat{a}_0) + P_1 \int_{V_T+m}^{\infty} p_N(y - \hat{a}_1) \\
P_{\text{borr}} &= 1 - P_{\text{correcto}} - P_e
\end{aligned} \tag{11}$$

$$P_{\text{corr}} = P_1 \int_{-\infty}^{V_T-m} p_N(y - \hat{a}_1) + P_0 \int_{V_T+m}^{\infty} p_N(y - \hat{a}_0) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
P_e &= Q\left(\frac{1/2 - a/2 + m}{\sigma}\right) \\
P_{\text{corr}} &= 1 - Q\left(\frac{1/2 - a/2 - m}{\sigma}\right) \\
P_{\text{borr}} &= Q\left(\frac{1/2 - a/2 - m}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{1/2 - a/2 + m}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

(g)

$$\begin{aligned}
P_e = 10^{-5} &\Rightarrow \frac{1/2 - a/2 + m}{\sigma} = Q^{-1}(10^{-5}) = 4.3 \\
P_{\text{borr}} = 2P_e = 2.10^{-5} &\Rightarrow \left(\frac{1/2 - a/2 - m}{\sigma}\right) = Q^{-1}(3.P_e) = 3.9 \\
&\Rightarrow \frac{1/2 - a/2 - m}{1/2 - a/2 + m} = \frac{3.9}{4.3} \Rightarrow m = 0.015
\end{aligned}$$

## Problema 2

(a) Para los valores posibles de  $f_\Delta$  y con  $W = 15$  kHz se tiene  $D = \frac{f_\Delta}{W} \in [1, 3]$ . Aplicando la regla de Carson se calcula el ancho de banda de un canal:

$$B = 2(D + 2)W \in [90, 150]\text{kHz}.$$

Para maximizar el número de canales se debe elegir el  $f_\Delta$  que resulte en el mínimo ancho de banda para cada canal. De esta forma se tiene  $f_\Delta = 15$  kHz,  $D = 1$  y  $B = 90$  kHz. Para encontrar el número total de canales  $n_C$ , la banda asignada debe ser:

$$B_{total} \geq n_C \cdot B + (n_C - 1) \cdot G$$

siendo  $B_{total} = 10\text{MHz}$  y  $G = 10\text{kHz}$  la guarda entre canales. Despejando se tiene:

$$n_C \leq \frac{B_{total} + G}{B + G}$$

Sustituyendo por los valores anteriores se llega a que el máximo es  $n_C = 99$ .

(b)

$$N(d) = \int_{-W}^W f^2 \frac{\eta}{2S_R} df = \frac{\eta}{3S_R} W^3 = \frac{\eta L(d)}{3S_T} W^3$$

$$\text{SNR}_D(d) = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta L(d) W}$$

(c) Se deben cumplir las condiciones de  $\text{SNR}_D$  y umbral ( $\text{SNR}_R$ ) para toda distancia  $d$ .

$$\text{SNR}_D(d) = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta L(d) W} \geq 10^5$$

$$\text{SNR}_R(d) = \frac{S_T}{\eta L(d) B} \geq 10$$

En particular el peor caso corresponde a  $d = 50$  m del cual se despejan las condiciones para la potencia de transmisión:

$$S_T \geq 10^5 \frac{\eta L(50) W}{3D^2 S_x} \approx 8.9 \text{ mW}$$

$$S_T \geq 10 \eta L(50) B \approx 0.16 \text{ mW}$$

De esto se deduce que la mínima potencia de transmisión para estar siempre por encima de los 50 dB en recepción es  $S_T = 8.9$  mW.

(d)

$$\text{SNR}_D(0) - \text{SNR}_D(50) = L(50) - L(0) = 12.5\text{dB}$$

(e) La potencia recibida sería  $S_D = f_\Delta^2 \cdot S_x$  en ambos casos, por lo que no hay diferencia entre los micrófonos. Podría ser necesario de todas formas ajustar los volúmenes según el contenido de audio particular de cada micrófono (ej: un instrumento o una voz).

(f) El ruido parabólico de FM hace que las componentes de alta frecuencia se vean más afectadas que las bajas frecuencias. Los filtros de preénfasis y deénfasis permiten compensar este efecto amplificando las altas frecuencias del mensaje antes la modulación. Luego, en recepción se utiliza el filtro inverso que recupera el mensaje original y hace que el ruido sea el mismo para todas las frecuencias.

(g) Los espectros antes y después del filtro de deénfasis quedan:

