Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

21 de julio de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema

Se quiere analizar el desempeño de distintos sistemas de modulación digital trasmitidos en presencia de ruido blanco gaussiano y con receptor de correlación. El ruido cumple con las hipótesis usuales con densidad espectral de potencia $G_n(f) = \frac{1}{2}\eta$.
En primera instancia se analizará el desempeño de un sistema 16-QAM con la constelación de la Figura 1a.

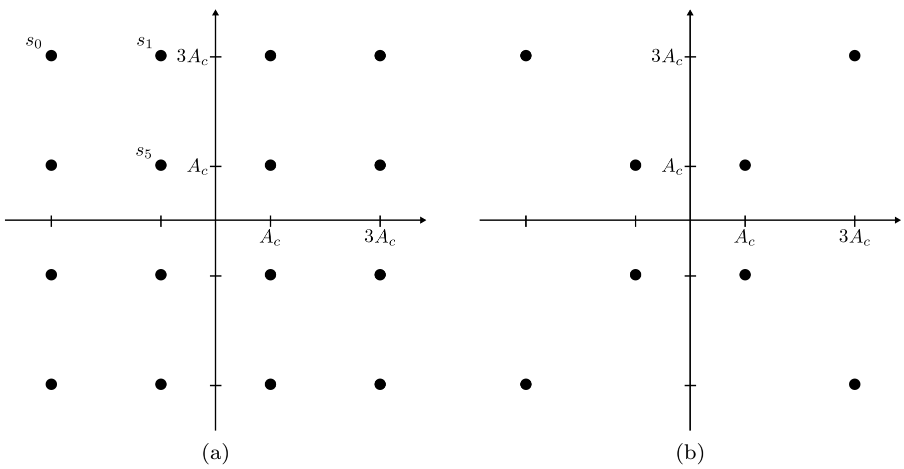


Figure 1

(a) Dibujar las fronteras de las regiones de decisión.

(b) Calcular la probabilidad de recibir correctamente el símbolo s_5 en función de A_c y η.

(c) Repetir la parte anterior para los símbolos s_0 y s_1.

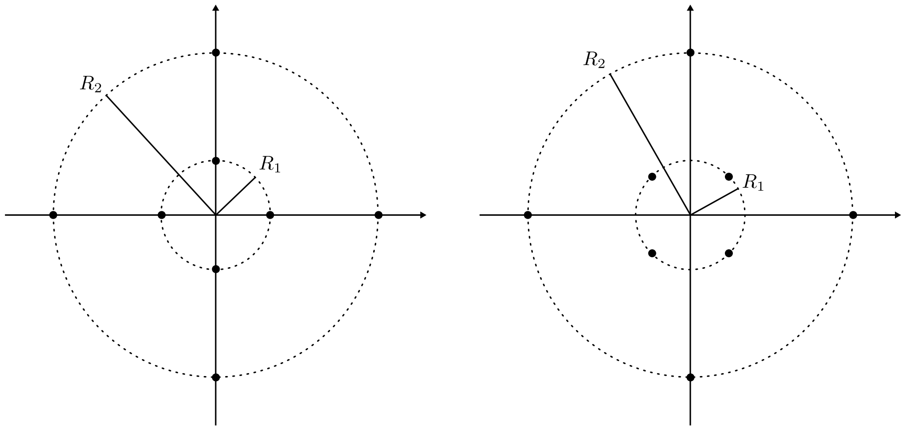
(d) Determinar la probabilidad de error para esta constelación.

La segunda constelación a evaluar se muestra en la Figura 1b.

(e) Dibujar las fronteras de las regiones de decisión y dar una expresión para la probabilidad de error en este caso.

Se busca comparar el desempeño de las dos constelaciones en la Figura 2 entre sí y respecto a la constelación en la Figura 1b si $R_1 = \sqrt{2}A_c$ y $R_2 = 3R_1$.

(f) ¿Cuál de las constelaciones tiene menor probabilidad de error en las mismas condiciones de transmisión?



(a) (b)

Figure 2

Problema

Se quieren comparar el desempeño de dos sistemas de comunicación analógico para la trasmisión de un mensaje $x(t)$ con ancho de banda W_x. En ambos casos se asume que la potencia trasmitida máxima permitida es $S_T = 10$ W, la potencia media del mensaje es $S_x = 1$ W, la densidad espectral de potencial del ruido es $G_n(f) = \frac{1}{2}\eta = 10^{-9}$ W/Hz y la atenuación entre el trasmisor y el receptor es 40 dB.
En primera instancia se analiza el desempeño de un sistema AM con detección de envolvente. Suponer que el índice de modulación es $\mu = 0.25$ y que el ancho de banda disponible es el de AM comercial $B_T = 10$ kHz.

(a) Determinar las condiciones que debe cumplir el máximo ancho de banda del mensaje que se puede utilizar. Calcularlo.

(b) Calcular la máxima relación señal a ruido en detección que se puede obtener.

En segunda instancia se analizará el caso de FM donde se dispone de $B_T = 180$ kHz y se envía el mismo mensaje.

(c) Determinar las condiciones que debe cumplir el máximo índice de modulación que se puede utilizar. Calcularlo.

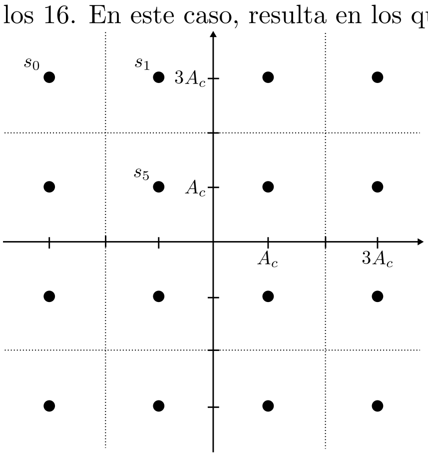
(d) Calcular la máxima relación señal a ruido en detección que se puede obtener.

(e) ¿Cuál de los dos métodos analizados utilizaría? Explicar el criterio utilizado.

Solución

Problema

(a) Asumiendo símbolos equiprobables, y con el dato de que el ruido es blanco y gaussiano, las regiones de decisión de cada símbolo son los puntos para los cuales el símbolo en cuestión es el más cercano de los 16. En este caso, resulta en los que se muestran en la figura.



(b) Definiendo S como el símbolo enviado (en este caso fijo en s_5), Y_i e Y_q como los números (aleatorios) en fase y cuadratura obtenidos del filtro de recepción (en este caso de correlación, pero era igual si era apareado), y por las hipótesis ya mencionadas (en particular, las referidas al ruido), en este caso la probabilidad de recibir correctamente s_5 resulta

$$P(\text{éxito} \,|\, S = s_5) = P(-2A_c < Y_i < 0; 0 < Y_q < 2A_c \,|\, S = s_5)$$
$$= P(-2A_c < Y_i < 0 \,|\, S = s_5) P(-2A_c < Y_q < 0 \,|\, S = s_5) = \left(1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right)^2.$$

(c) Para el símbolo s_0 resulta, de manera similar a lo anterior:

$$P(\text{éxito} \,|\, S = s_0) = P(-\infty < Y_i < -2A_c; 2A_c < Y_q < \infty \,|\, S = s_0) = \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right)^2,$$

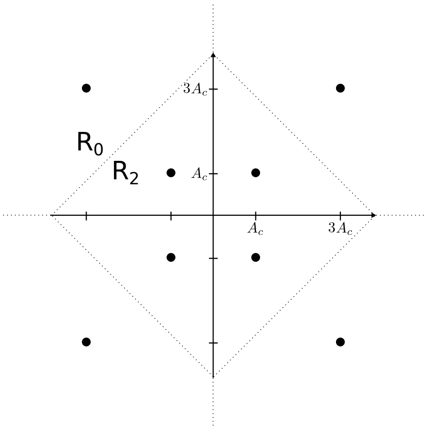
y para el símbolo s_1:

$$P(\text{éxito} \,|\, S = s_1) = P(-2A_c < Y_i < 0; 2A_c < Y_q < \infty \,|\, S = s_0) = \left(1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right)\left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{2A_c^2}{\eta}}\right)\right),$$

(d) En este caso no puedo asumir que se envíe algún símbolo en particular, por lo que asumiremos, al igual que en la primera parte, que los símbolos son equiprobables. Además, la constelación y el ruido tienen una cierta simetría: por ejemplo, la probabilidad de error es igual para los símbolos $(s_0, s_3, s_{12}, s_{15})$, así como para los símbolos $(s_1, s_2, s_4, s_7, s_8, s_{11}, s_{13}, s_{14})$ y (s_5, s_6, s_9, s_{10}). Como ya tenemos calculadas las probabilidades de éxito para los símbolos s_0, s_1 y s_5, tenemos:

$$P(\text{error}) = 1 - P(\text{éxito}) = 1 - \sum_{i=0}^{15} P(\text{éxito} \,|\, S = s_i) P(S = s_i)$$
$$= 1 - \frac{4}{16} P(\text{éxito} \,|\, S = s_5) - \frac{4}{16} P(\text{éxito} \,|\, S = s_0) - \frac{8}{16} P(\text{éxito} \,|\, S = s_1).$$

(e) Las región de decisión de cada símbolo, haciendo las mismas hipótesis que en la primera parte, son los puntos más cercanos al símbolo en cuestión respecto al resto. En este caso, se pueden obtener de trazar las bisectrices entre los símbolos más cercanos, resultando en las que se muestran en la figura:



Para hallar la probabilidad de error se razona de la misma manera que en la parte anterior. En particular, por simetría tenemos dos grupos de símbolos con la misma probabilidad de error: los "interiores" y los "exteriores". Siguiendo la numeración de las partes anteriores para los símbolos, tenemos entonces la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
P(\text{error}) &= 1 - P(\text{éxito}) = 1 - \sum_{i=0}^{7} P(\text{éxito} \,|\, S = s_i) P(S = s_i) \\
&= 1 - \frac{4}{8} P(\text{éxito} \,|\, S = s_0) - \frac{4}{8} P(\text{éxito} \,|\, S = s_2),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
P(\text{éxito} \,|\, S = s_0) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{(x,y)\in R_0} e^{\frac{(x+3A_c)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(y-3A_c)^2}{2\sigma^2}} dxdy \\
P(\text{éxito} \,|\, S = s_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{(x,y)\in R_2} e^{\frac{(x+A_c)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(y-A_c)^2}{2\sigma^2}} dxdy
\end{aligned}
$$

con $\sigma^2 = \eta/2$ y R_0 y R_2 son las regiones de decisión de los símbolos s_0 y s_2 (marcadas en la figura) respectivamente. Esta es una expresión exacta de la probabilidad de error, donde la integral no será fácil de evaluar. Existe la posibilidad de realizar varias aproximaciones. Por ejemplo, si suponemos que la SNR es relativamente alta, podemos asumir que realizará un error para un símbolo en particular decidiendo únicamente por el/los símbolos más cercanos. Por ejemplo, para s_2 asumir que el error será por "confundirlo" en recepción con s_3 y s_4 y despreciando las otras posibilidades.
Tanto la expresión exacta como una aproximación debidamente justificada se toman como correctas.

(f) La primer constelación es la misma que se analizó en el ejercicio anterior, a excepción de un giro de $\pi/4$. Como el ruido es simétrico respecto a un giro, el desempeño es el mismo. La segunda constelación tiene los símbolos "interiores" más alejados de los "exteriores", por lo que tendrá una menor probabilidad de error.

Problema

(a) Las condiciones que debe cumplir el ancho de banda del mensaje W_x son dos

1. Ancho de banda permitido:

$$W_x \leq \frac{1}{2} B_T^{\max} \Rightarrow W_x \leq 5 \text{ kHz}$$

2. Umbral en la SNR_R:

$$\text{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow W_x \leq \frac{S_T^{\max}}{20L\eta} = 25 \text{ kHz}$$

De la condición más restrictiva surge que $W_x \leq 5$ kHz.

(b) Con el ancho de banda obtenido en la parte anterior garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale

$$\mathrm{SNR}_D = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \frac{S_T^{\max}}{L\eta W_x} = 7.7 \text{ dB}$$

(c) Las condiciones que debe cumplir el índice de modulación D son dos

1. Ancho de banda permitido:

$$B_T = 2(D+1)W_x \leq B_T^{\max} = 180 \text{ kHz} \Rightarrow D \leq \frac{B_T^{\max}}{2W_x} - 1 = 17$$

2. Umbral en la SNR_R:

$$\mathrm{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{2L\eta(D+1)W_x} \leq 10 \Rightarrow D \leq \frac{S_T^{\max}}{20L\eta W_x} - 1 = 4$$

De la condición más restrictiva surge que $D \leq 4$. Se utilizó $W_x = 5$ kHz.

(d) Con los parámetros definidos garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale

$$\mathrm{SNR}_D = 3D^2 S_x \frac{S_T^{\max}}{L\eta W_x} = 36.7 \text{ dB}.$$

(e) Basados en la SNR obtenida en detección utilizando la misma potencia transmitida es más conveniente el sistema FM.