Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

28 de julio de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Los monitores para bebés analógicos trabajan habitualmente con modulación FM en la banda de VHF. El sistema se compone de dos equipos: un transmisor, que se activa cuando detecta que el audio sensado supera cierto umbral y un receptor, que reproduce por el parlante cuando recibe la señal. En este problema se analizará el diseño y operación de un sistema de estas características operando en la banda de 49 MHz. El sistema puede operar en 5 portadoras contiguas distintas[1], espaciadas 15 kHz entre sí. La modulación FM se realiza con una desviación de frecuencia $f_\Delta = 5$ kHz. Para operar correctamente se debe alcanzar una SNR_D superior a los 35 dB.

(a) Hallar el ancho de banda del audio máximo que se puede utilizar para tener 5 bandas no solapadas operando en forma simultánea.

(b) Si se trabaja con un ancho de banda del audio de 4kHz, ¿cuántas bandas no solapadas quedan en este caso?

A partir de ahora se considera un ancho de banda de audio $W = 4$ kHz y una potencia de señal $S_x = 0.5$.

Se busca determinar la potencia de transmisión necesaria S_T para tener un alcance de 150m en condiciones de espacio abierto. Para modelar el canal, se considera una atenuación $L = 20\log(d) + 20\log(f) - 27.6$ en dB, siendo d la distancia en metros y f la frecuencia en MHz. Además se considera una ganancia de 5 dB en cada extremo dada por la antena del transmisor y la del receptor. Considerar que el amplificador de recepción introduce un ruido AWGN con $\eta_A = 10^{-13}$ W/Hz.

(c) Hallar la potencia de transmisión necesaria S_T para cumplir los requerimientos.

Para determinadas situaciones particulares donde el alcance máximo no sea suficiente o se reduzca mucho el área de cobertura debido a los obstáculos, podría ser necesario pasar a una solución cableada para conectar ambos equipos. Si se trabaja con un cable coaxial, el modelo de canal en este caso es el habitual para medios duros, con un $\eta_{cable} = 10^{-15}$ W/Hz y una atenuación $L = 5$ para una distancia de 100m. En esta parte se considera que el amplificador de recepción es ideal.

(d) Manteniendo los requerimientos planteados y utilizando la potencia hallada en la parte anterior, ¿cuál sería la máxima distancia a la que el sistema podría funcionar?

[1] Las portadoras son: 49.830, 49.845, 49.860, 49.875 y 49.890; se denominan canales A, B, C, D y E, respectivamente.

Para completar el sistema se debe definir el umbral del sensado de audio que activa la transmisión. Se considera que cuando no hay actividad relevante el nivel de presión sonora tiene una distribución gaussiana de media μ_1 y varianza σ, mientras que cuando sí hay actividad la media es μ_2 y la varianza es también σ.

(e) Asumiendo que en cada instante de tiempo es equiprobable tener o no tener actividad, ¿cuál sería el umbral óptimo para minimizar la probabilidad de error en la detección?

(f) Con un umbral de decisión, como en este caso, se pueden cometer dos tipos de errores. ¿Son ambos tipos de errores igual de "relevantes"? ¿Cómo afectaría en el diseño de la parte anterior si uno de ellos fuera más relevante que el otro?

Problema 2

Se desea transmitir símbolos de una fuente binaria IID con bits equiprobables, generados a una tasa r. Para ello se utiliza un sistema de transmisión pasabanda BPSK con portadora f_c y pulso de conformación rectangular sin retorno a cero. El canal de transmisión cumple las hipótesis usuales, con parámetros L y η.

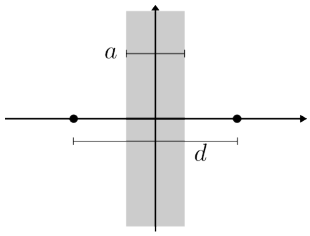
(a) Dar un diagrama de bloques completo de un receptor basado en un receptor de correlación. Explicar cualitativamente el funcionamiento del receptor y las hipótesis asumidas.

(b) Estimar el ancho de banda B_T y bosquejar el espectro de la señal transmitida.

(c) Hallar las componentes de señal y de ruido a la entrada del comparador en el receptor. Hallar a partir de ellas la probabilidad de error.

(d) Calcular la energía de bit E_b y expresar la probabilida de error en funcion de E_b

Se quiere evaluar cómo se afecta la probabilidad de error (P_e) cuando se utiliza decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección (ver la siguiente figura). Se define $\alpha = \frac{a}{d}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ donde d es la separación entre los símbolos en detección y a el ancho de la zona de borrado.



(e) Hallar las expresiones para P_e y la P_{bor} (probabilidad de borrado) como una función de E_b y α.

(f) Determinar el valor de α para que se cumpla que $P_{\text{bor}} = 2P_e$, suponiendo que $P_e = 10^{-5}$. Calcular la SNR para este caso.

Observación: La motivación para buscar $P_{\text{bor}} = 2P_e$ en la parte (f) viene dada porque generalmente un código corrector de errores, para una distancia de código dada, puede detectar el doble de los errores de los que puede corregir.

Solución

Problema 1

(a) $B = 2(D+2)W$ con $D = \frac{f_\Delta}{W}$, por lo que tenemos: $B = 2(f_\Delta + 2W)$ con un $B_{max} = 15$kHz. Despejando se tiene $W_{max} = 1.25$ kHz.

(b) Ahora $W = 4$ kHz por lo que mediante $B = 2(f_\Delta + 2W)$ se llega a que $B = 26$kHz. En este caso se cuenta con 3 bandas no solapadas (canales A, C y E).

(c) Se plantea la $SNR_D = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta LW}$ y despejamos S_T para cumplir con la SNR_{D_min}. La atenuación queda $L = 20\log(150) + 20\log(49) - 27.6 - 10$
El resultado es $S_T = SNR_{D_{min}} \eta LW/3D^2 S_x = 4.3$ mW.
Por último se verifica el umbral:
$SNR_R = \frac{S_T}{\eta LB} => 10$

(d) A partir de la $SNR_D = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta LW}$ se despeja el ηL necesario, que queda $\eta L = 7.97 \times 10^(-10)$.
Con el modelo de canal tenemos $\eta(x) = \eta \frac{L^{-x}-1}{L^{-1}-1}$ y $L(x) = L^x$, donde $x = 1$ corresponde a 100m.
Despejando x se obtiene que la distancia máxima corresponde a 830 m.
Por último se verifica el umbral:
$SNR_R = \frac{S_T}{\eta LB} => 10$

(e) Asumiendo que son equiprobables el suceso de que haya actividad y que no haya actividad, y teniendo en cuenta las omisiones en la detección de la misma forma que las falsas alarmas, el umbral está dado por el valor medio entre las medias de ambas distribuciones, en este caso $(\mu_1 + \mu_2)/2$.

(f) Para esta aplicación resulta de mayor relevancia omitir una detección que generar una falsa alarma, ya que con el primer tipo de error se podría dar una situación de emergencia para el bebé y sin embargo no ser notificada. Para atender a esta diferencia en la relevancia de cada tipo de error, se podría modificar el umbral de decisión, fijando un valor más cercano a la media cuando hay inactividad ($V_T < (\mu_1+\mu_2)/2$). De esta forma, si bien habrá un aumento en las falsas alarmas, nos aseguramos de que la probabilidad de detección de eventos relevantes sea mayor.

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) La señal conformada x_c es de la forma,

$$x_c(t) = \sum_k a_k \cos(\omega_c t + \phi) p(t) = \left[\sum_k a_k p(t)\right] \cos(\omega_c t + \phi) = x_a(t)\cos(\omega_c t + \phi)$$

donde ϕ es la fase aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$, $p(t)$ es un pulso rectangular de duración $T = 1/r$ y a_k es una secuencia binaria equiprobable que toma los valores A y -A.
El espectro del proceso x_c está dado por,

$$G_c(f) = \frac{1}{4}(G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c))$$

mientras que el espectro de $x_a(t)$ se obtiene utilizando la conocida fórmula para el espectro de una señal PAM. En este caso la secuencia a_k tiene media nula y varianza A^2 por lo que se tiene que,

$$G_a(f) = A^2 r |P(f)|^2 = \frac{A^2}{r} sinc^2\left(\frac{f}{r}\right)$$

Para estimar el ancho de banda necesario el criterio de mantener más del 90 % de la energía corresponde con eliminar el espectro fuera del primer cero del $sinc^2$ y se tiene que $B_T = 2r$, por otro lado el criterio de poder detectar el pulso corresponde a cortar el $sinc^2$ en la mitad de su lóbulo principal y el ancho de banda en ese caso sería $B_T = r$.

(c) La señal recibida está dada por,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sum_k a_k p(t) \right] \cos(w_c t + \phi) + n(t)$$

donde $n(t)$ es el ruido que se introduce en el canal, y L es la atenuación sufrida por la señal en el canal. Como estamos en el caso de señalización polar equiprobable, tenemos que la probabilidad de error está dada por,

$$P_e = Q\left(\frac{|\hat{a_1} - \hat{a_0}|}{2\sigma}\right)$$

donde los $\hat{a_i}$ son los valores que tomaría la señal en el instante de muestreo en ausencia de ruido y σ es la varianza del ruido luego del integrador. Calcularemos primero los valores $\hat{a_i}$. Notar que dada la señalización estos toman valores opuestos, por lo que solo se calculará uno de ellos. Si la miramos en un intervalo del tipo $[kT, (k+1)T]$ el valor de $\hat{a_1}$ queda dado por:

$$\hat{a_1} = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{2A}{\sqrt{L}} \cos^2(w_c t + \phi)\, dt = \frac{AT}{\sqrt{L}}$$

ya que f_c es múltiplo de r. Ahora es necesario hallar la potencia del ruido en el instante de muestreo luego del integrador. Este está dado por:

$$N[k] = \int_{kD}^{(k+1)D} n(t) \cos(\omega_c t) dt.$$

De esto se puede ver que el ruido $N[k]$ es gaussiano pues es combinación lineal de variables aleatorias gaussianas. Además es inmediato ver que tiene media nula. Su potencia está dada por,

$$\mathbf{E}\left(N^2[k]\right) = \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} R_n(t - t') \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t')\, dt dt'.$$

Pero sabemos que $R_n(\tau) = \eta\delta(\tau)$, de modo que

$$\mathbf{E}\left(n^2[k]\right) = \sigma^2 = \eta T$$

con lo que el proceso $N[k]$ queda caracterizado. Sustituyendo en la ecuación de la probabilidad de error tenemos,

$$P_e = Q\left(\frac{\frac{2AT}{\sqrt{L}}}{2\sqrt{\eta T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta L}}\right).$$

(d)

$$E_b = \int_0^T \left(\frac{A}{\sqrt{L}} \cos(w_c t)\right)^2 dt = \frac{A^2 T}{2L}$$

por lo que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q(k)$$

con

$$k = \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}$$

(e)

$$P_e = p_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 + a/2}{\sigma}\right) + p_0 Q\left(\frac{a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d/2 + a/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{(1+\alpha)\,d}{2\sigma}\right) = Q\left((1+\alpha)\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q\left((1+\alpha)\,k\right)$$

$$P_{\text{bor}} = 1 - P_e - P_{\text{correcto}}$$

$$P_{\text{correcto}} = p_1\left(1 - Q\left(\frac{\hat{a}_1 - a/2}{\sigma}\right)\right) + p_0\left(1 - Q\left(\frac{-a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right)\right) = 1 - Q\left((1-\alpha)\,k\right)$$

$$P_{\text{bor}} = -Q\left((1+\alpha)\,k\right) + Q\left((1-\alpha)\,k\right)$$

(f)

$$P_e = 10^{-5} \Rightarrow (1+\alpha)\,k = Q^{-1}\left(10^{-5}\right) = 4.3$$

$$P_{\text{bor}} = 2P_e = 2.10^{-5} \Rightarrow (1-\alpha)\,k = Q^{-1}\left(3.10^{-5}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{4.3}{4} = 1.075 \Rightarrow \alpha = 0.0361$$

$$k = 4.15$$