Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de diciembre de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Una señal de voz $x(t)$ de rango dinámico [-1,1], potencia S_x y ancho de banda $W = 3,4$ kHz es muestreada a una frecuencia $f_s = 8$ kHz.

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor (TX) y receptor (RX) de un sistema PCM binario de q niveles (n bits), con cuantificación uniforme.

Se desea recibir la señal con una SNR_D dada, teniendo la mínima potencia de ruido de cuantificación posible.

(b) Determinar los parámetros de funcionamiento del sistema (q, n, ancho de banda de transmisión B_T). Dar criterios de elección de los mismos.

Se codifica la fuente binaria utilizando señalización polar y un pulso conformador rectangular de ancho $T = 1/(nf_s)$. La probabilidad de transmitir un '1' es p. El canal introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, con una densidad espectral de potencia $\eta/2$. En el instante de muestreo la amplitud de la señal recibida es A_R.

(c) Esbozar el espectro de la señal conformada para una probabilidad p genérica. ¿Cómo afecta p la forma del espectro?

(d) Determinar la entropía de la fuente y hallar la probabilidad p que la maximiza.

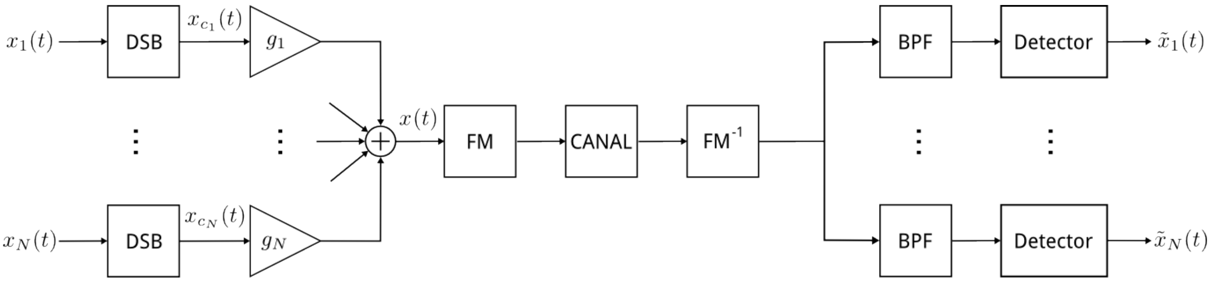
(e) Diseñar la etapa de recepción para minimizar la probabilidad de error P_e, para p cualquiera.

En la siguiente parte utilizar la p hallada en la parte (d).

(f) Bosquejar la SNR_D en función de SNR_R indicando la zona de trabajo óptima. Determinar A_R para trabajar en esa zona. Si la atenuación del canal es L (en potencia), determinar A_T (amplitud de la señal enviada).

Problema 2

Se considera el transmisor y el receptor de la figura, donde N mensajes $x_i(t)$ independientes, de ancho de banda W y de potencia media P_x se transmiten multiplexados en frecuencia. Se modulan en DSB sobre subportadoras $f_{c_i} = (2i-1)W$ con $i = 1 \dots N$, todas con igual potencia S_{DSB}. Luego la suma de todas ellas se modula en frecuencia con portadora $f_c \gg 2NW$, constante de desviación de frecuencia f_Δ y potencia de transmisión S_T. El canal tiene una



atenuación en potencia L e introduce ruido AWGN con DEP $\frac{1}{2}\eta$ referido a la entrada del receptor. Las ganancias en potencia g_i deben cumplir $S_{\text{DSB}} \sum_i g_i = S_x$, donde $x(t)$ es la señal antes del modulador FM.

(a) Hallar el máximo número $N_{\text{máx}}$ de canales que se puede transmitir si se requiere una relación señal a ruido a la salida del discriminador igual o mayor a SNR_{FM}.

(b) Calcular $N_{\text{máx}}$ para los valores de los parámetros indicados al final del problema. Hallar el ancho de banda utilizado en la transmisión en este caso.

(c) Hallar la SNR_D^i para cada señal $x_i(t)$. Verificar que el resultado es de la forma:

$$\text{SNR}_D^i = \frac{K g_i}{i^3 - (i-1)^3}$$

siendo K una constante que depende de los parámetros fijos del sistema.

En la parte siguiente se consideran una alternativa para elegir las ganancias g_i. Se busca evaluar la capacidad total del canal, considerando ésta como la suma de las capacidades en cada uno de los canales del sistema.

(d) Hallar las ganancias g_i para que la relación señal a ruido en cada canal sea la misma. Hallar dicha SNR y expresar la capacidad total del canal para este caso.

Datos: $W = 8$ kHz, $P_x = 1$, $S_{\text{DSB}} = 400$ mW, $f_c = 100.0$ MHz, $f_\Delta = 75$ kHz, $S_T = 30$ W, $S_x = 1/2$, $L = 20$, $\eta = 10^{-7}$ W/Hz, $\text{SNR}_{\text{FM}} = 30$ dB.

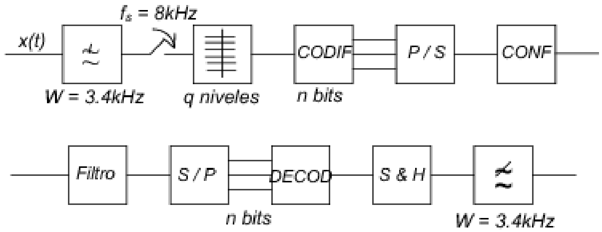
Pueden ser útiles las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Solución

Problema 1

(a)



(b) Asumiremos que estamos trabajando sobre el umbral P.C.M.Para poder garantizar un valor dado de SNR_D (que tomaremos igual a SNR_D^*), se deberá cumplir que:

$$\text{SNR}_D^* \leq 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W} \Rightarrow q \geq \sqrt{\frac{\text{SNR}_D^*}{3S_x} . \frac{2W}{f_s}}$$

A su vez, para que la potencia del error de cuantificación sea mínima, es necesario que el valor de n sea el mínimo posible. Recordando que debe cumplirse también que $q \leq 2^n$, luego se tiene que:

$$n \geq \log_2(q) = \log_2 \left(\sqrt{\frac{\text{SNR}_D^*}{3S_x} . \frac{2W}{f_s}} \right)$$

Dado que n debe ser un número natural, se desprende que el valor de n es $\left\lceil \log_2 \left(\sqrt{\frac{\text{SNR}_D^*}{3S_x} . \frac{2W}{f_s}} \right) \right\rceil$.
Finalmente, también debe cumplirse que $B_T \geq (n\ f_s)/2$ (lo cual permite asegurar que no se tendrá Interferencia Intersimbólica conformando con un pulso de Nyqvist adecuado). Tomando el mínimo valor de B_T que cumple esto, se tiene entonces que $B_T = (n\ f_s)/2$, donde n es el calculado más arriba.

(c) La señal conformada, $x_c(t)$, es una señal PAM, por lo que su espectro es de la forma:

$$G_{x_c}(f) = \frac{\sigma_x^2 |S(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| S\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

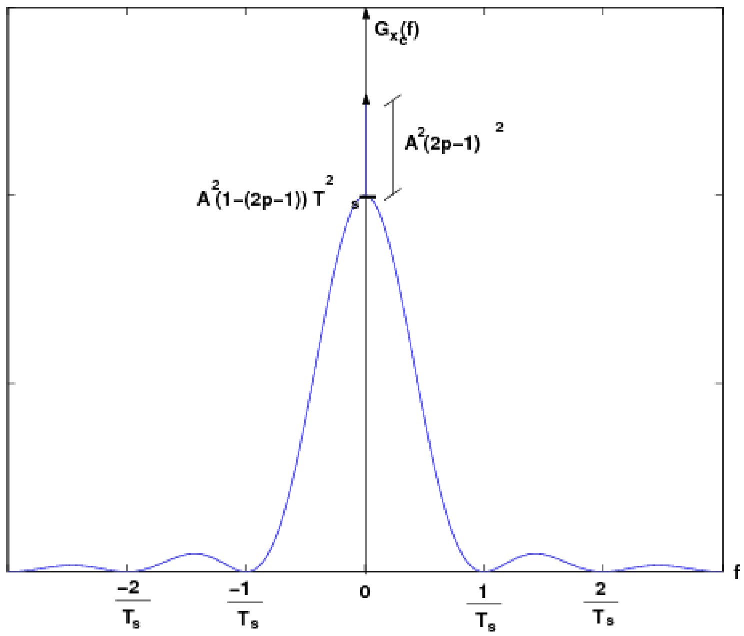
donde:

$$m_x = A.p + (-A).(1-p) = A.(2p-1)$$
$$\sigma_x^2 = R_x[0] - m_x^2 = A^2.p + (-A)^2.(1-p) - A^2(2p-1)^2 = A^2(1-(2p-1)^2)$$
$$|S(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT)$$

De la forma de $|S(f)|^2$ se desprende que $|S(k/T)|^2 = T^2$ si $k = 0$, y $|S(k/T)|^2 = 0$ en otro caso (considerando k entero). Por lo tanto, la densidad espectral de potencia de la señal conformada queda:

$$\begin{aligned} G_{x_c}(f) &= \frac{A^2(1-(2p-1)^2)}{T} T^2 sinc^2(fT) + \frac{A^2(2p-1)^2}{T^2} T^2 \delta(f) \\ &= A^2(1-(2p-1)^2) T sinc^2(fT) + A^2(2p-1)^2 \delta(f) \end{aligned}$$

Esta función tiene la forma:

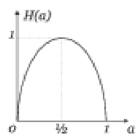


El valor de p afecta a los valores de m_x y σ_x. Específicamente, si $p = 1/2$, entonces $m_x = 0$ y no se tiene una delta en $f = 0$ en el espectro, la cual no aportaba información. Esto es deseable ya que permite ahorrar potencia de transmisión, que antes era emitida pero no aprovechada. Con este valor de p, $G_{x_c}(f) = A^2 T sinc^2(fT)$.

(d) La entropía de la fuente es:

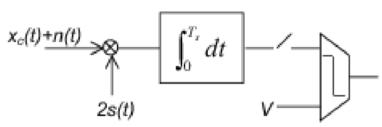
$$H(A) = \sum_{i=1}^{2} p_i . I_i = \sum_{i=1}^{2} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right) = p \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) + (1-p) \log_2 \left(\frac{1}{1-p} \right) = \Omega(p)$$

donde $i = 1,\ 2$ representa a los dos símbolos ('0' y '1') que emite la fuente.
La forma de $\Omega(p)$ es:



Se puede ver que presenta un máximo en $p = 1/2$.

(e) Como p es genérico es necesario utilizar un Filtro de Correlación. Por lo tanto, en recepción se tendrá algo de la forma:



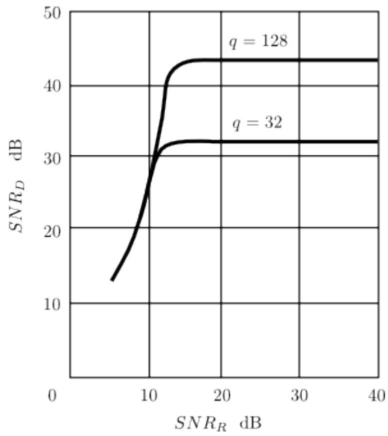
(f) Sabemos que, dependiendo del valor de P_e, el ruido de decodificación será más o menos relevante que el de cuantificación. Más específicamente, se tiene que:

$$\text{SNR}_D = \frac{3q^2 S_x}{\frac{2W}{f_s} + 4q^2 P_e}$$

Luego, dependiendo de la relación entre P_e y $\frac{2W}{4q^2 f_s}$, el valor de SNR_D será diferente. Así, se cumple:

- Si $P_e \ll \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3q^2 S_x f_s}{2W}$, independiente de la SNR_R.
- Si $P_e \gg \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4P_e}$. Como $P_e = Q(\sqrt{\text{SNR}_R})$ (ya que se está trabajando con señalización polar y símbolos equiprobables), entonces se cumple que $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4Q(\sqrt{\text{SNR}_R})}$.

En base a estas observaciones, podemos bosquejar la forma de SNR_D variando respecto a SNR_R:



La zona de trabajo óptima se tiene justo en el umbral, es decir, cuando $\text{SNR}_R \approx 18.5$. Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, entonces se debe cumplir que $A_R = \sqrt{18.5\eta B_T}$. A su vez, $A_R = A/\sqrt{L}$, y entonces $A = \sqrt{18.5\eta B_T L}$.

Problema 2

(a) La SNR_D para nuestro transmisor FM es:

$$\text{SNR}_D = 3D^2 S_x \gamma \text{ con } \gamma = \frac{S_T}{\eta L W_x} \text{ y } W_x = 2NW$$

Así, tenemos que:

$$\frac{3D^2 S_x S_T}{\eta L 2NW} \geq \text{SNR}_{\text{FM}}$$

siendo

$$D = \frac{f_\Delta}{W_x} = \frac{f_\Delta}{2NW}$$

De esta ecuación es posible despejar N:

$$N^3 \leq \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta L 8 W^3 \text{SNR}_{\text{FM}}}$$

Llamemos N_1 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Todo esto es válido si estamos trabajando sobre el umbral de FM, por lo que debemos imponer esta condición:

$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \geq 10$$

donde

$$B_T = 2(D+2)2NW = 2\frac{f_\Delta + 4NW}{2NW}$$

De esta condición es posible despejar N:

$$N \leq \frac{S_T - 20\eta L f_\Delta}{80\eta LW}$$

Llamemos N_2 a la parte entera del N que cumple la igualdad.
Entonces, dado que es necesario que se cumplan ambas condiciones, el máximo número de canales que se pueden transmitir queda:

$$N_{\text{máx}} = \text{mín}\{N_1, N_2\}$$

(b) El valor de D es entonces:

$$D = \frac{f_\Delta}{2N_{\text{máx}}W}$$

Según el valor que tome D tenemos que el ancho de banda resulta ser:
$B_T = 2f_\Delta$ si $D \gg 1$
$B_T = 4N_{\text{máx}}W$ si $D \ll 1$
$B_T = 2(D+2)2N_{\text{máx}}W$ si $D \in [1, 10]$

```
>> (3*(75000)^2*0.5*30/(10^-7*20*(2*8000)^3*10^3))^(1/3) = 3.14
```

```
>> (30-20*10^-7*20*75000)/(80*10^-7*20*8000) = 21.09
```

Tenemos que $N_1 = 3$ y $N_2 = 21$, por lo tanto el máximo es:

$$N_{\text{máx}} = 3$$

En este caso D queda:

```
>> D = 75000/(2*3*8000) = 1.5625
```

En este caso el ancho de banda de transmisión queda:

$$B_T = 2(D+2)2N_{\text{máx}}W = 342 \text{ kHz}$$

```
>> 2*(75000/(2*3*8000)+2)*2*3*8000 = 342000
```

(c) Ambas, SNR_R y SNR_D, son iguales para cada canal por ser DSB.
La potencia del ruido detectado en el canal i es:

$$N_D^i = 2\int_{2(i-1)W}^{2iW} \frac{\eta f^2}{2S_R} = \frac{\eta W^3}{3S_R}((2i)^3 - (2i-2)^3)$$

La potencia de la señal detectada en el canal i es:

$$S_D^i = f_\Delta^2 g_i S_{\text{DSB}}$$

Por lo tanto:

$$SNR_R^i = \text{SNR}_D^i = \frac{3S_T f_\Delta^2 g_i S_{\text{DSB}}}{\eta L(2W)^3(i^3 - (i-1)^3)}$$

(d) Deseamos que para todo i, j se cumpla $SNR_D^i = SNR_D^j$, esto implica:

$$g_1 = \frac{g_i}{i^3 - (i-1)^3} = \frac{g_j}{j^3 - (j-1)^3}$$

Además las ganancias deben cumplir:

$$S_{\text{DSB}} \sum_i g_i = S_x$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} g_1(i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^{N} g_i = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

De donde podemos despejar g_1:

$$g_1 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3) = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}}}$$

$$g_1 \sum_{i=1}^{N} (i^3 - (i-1)^3) = g_1(1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + ... + (N-1)^3 - (N-2)^3 + N^3 - (N-1)^3) = g_1 N^3$$

$$g_1 = \frac{S_x}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

También podemos despejar g_1 utilizando las fórmulas de las sumas geométricas:

$$\sum_{i=1}^{N} (3i^2 - 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{N} i^2 - 3\sum_{i=1}^{N} i + N = 3\frac{N(N+1)}{2} - 3\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + N = N^3$$

De esta forma se calcula g_i para un i genérico:

$$g_i = \frac{S_x(i^3 - (i-1)^3)}{S_{\text{DSB}} N^3}$$

Entonces la relación señal a ruido es la misma para cada canal y queda:

$$\text{SNR}_D^i = \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 (2W)^3}$$

La capacidad total del canal para este caso queda:

$$C = \sum_i C_i = \sum_i W \log_2(1 + SNR_D^i) = NW \log_2\left(1 + \frac{3 S_T f_\Delta^2 S_x}{\eta L N^3 (2W)^3}\right)$$