Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

30 de julio de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Una señal $x(t)$ de media nula es modulada en **AM**. Esta señal llega con un eco interferente de menor amplitud, es decir la señal a la entrada del receptor es de la forma:

$$v(t) = x_c(t) + \alpha.x_c(t - t_d).$$

El tiempo de eco t_d se mide experimentalmente y luego se elige la frecuencia de la portadora ω_c de forma que se cumpla la siguiente relación $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$.

(a) Se propone utilizar un demodulador sincrónico como receptor. Dibujar el diagrama de bloques del sistema y encontrar la salida detectada.

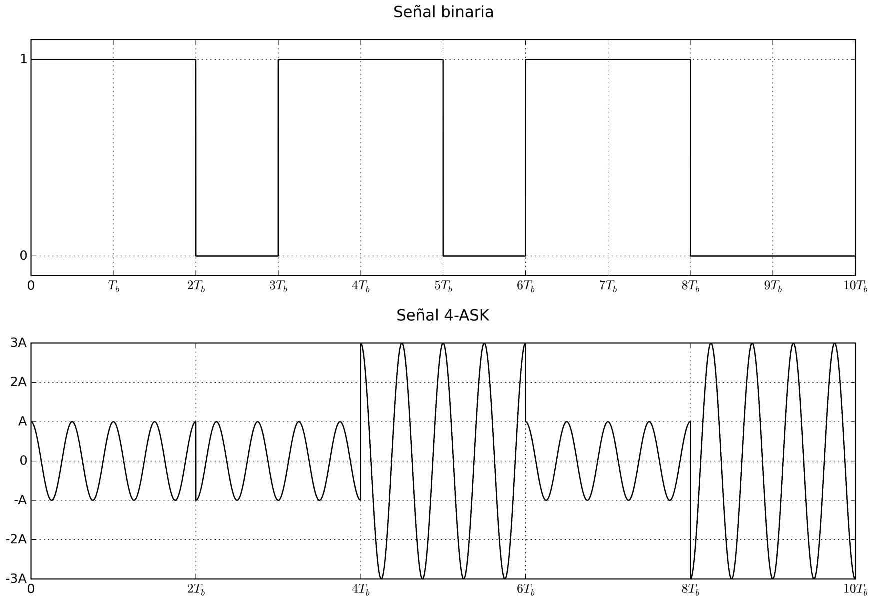
(b) Si la transmisión se hace en presencia de ruido AWGN con densidad espectal de potencia $G_n(f) = \eta/2$, calcular la SNR_D obtenida con el detector sincrónico en función de los parámetros del sistema.

(c) Ahora se propone utilizar un detector de envolvente como receptor. Dibujar el diagrama de bloques del sistema y encontrar la salida detectada.

(d) Mostrar que si los parámetros del sistema permiten la utilización de un detector de envolvente, la señal detectada en la parte anterior es aproximadamente proporcional al mensaje enviado. Calcular la SNR_D en este caso.

Problema 2

Una señal digital binaria $x(t)$ iid, con bits equiprobables y tiempo entre bits T_b, es transmitida utilizando modulación 4-ASK. El canal cumple las hipótesis habituales e introduce ruido AWGN de media nula y densidad espectral de potencia $\eta/2$. En recepción se utiliza un filtro apareado. La siguiente figura ilustra la señal binaria en diez tiempos de bit y su correspondiente señal transmitida.



(a) Dibujar un diagrama de bloques que represente la generación de la señal transmitida a partir de la señal binaria. Explicar su funcionamiento.

(b) Sea w_c la frecuencia de la portadora. Obtener una expresión temporal de la señal transmitida y determinar su densidad espectral de potencia.

(c) Determinar el ancho de banda mínimo necesario para su transmisíon y la eficiencia espectral de la modulación.

(d) Calcular la energía de cada símbolo transmitido en función de A y T_b.

(e) Dibujar la constelación de la modulación utilizada y los valores de I_k y Q_k posibles.

(f) Indicar el mapeo realizado entre cada par de bits posible y su símbolo 4-ASK correspondiente. ¿Es un mapeo de Gray? Justificar.

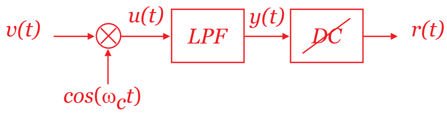
(g) Determinar el umbral óptimo de decisión para el primer bit (i.e. el bit de la izquierda en el mapeo anterior) y calcular su probabilidad de error en función de A y T_b.

(h) Para $\eta = 10^{-12}$ Watts/Hz y A $= 10^{-2}$, determinar la máxima tasa de transmisión de bits de modo que la probabilidad de error del primer bit sea menor a 10^{-6}.

Solución

Problema 1

(a)



En el detector sincrónico

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d))\cos(\omega_c(t - t_d))$$

por lo tanto

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(2\omega_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))\big[\cos(2\omega_c t - \omega_c t_d) + \cos(\omega_c t_d)\big]$$

ahora usando que se eligió ω_c para que $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$ obtenemos que

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(2\omega_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))\sin(2\omega_c t)$$

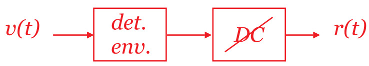
y luego filtrando obtenemos que $y(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))$, eliminando el termino de continua obtenemos

$$r(t) = \frac{A_c}{2}\mu x(t).$$

Se observa que el eco no afecta la detección.

(b) En este caso no aparecen errores en la detección debidas a la interferencia, entonces estamos en las condiciones analizadas en teórico para un detector sincrónico de AM. Entonces la $SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\frac{S_R}{\eta W}$. Donde tenemos que $S_R = S_T$ ya que no hay atenuación en el canal.

(c) Ahora veamos en el caso de un detector de envolvente



$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d))\cos(\omega_c(t - t_d))$$

Como ω_c fue elegido de forma que se cumpla $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$, tenemos que

$$\cos(\omega_c(t - t_d)) = \cos(\omega_c t - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega_c t)$$

entonces,

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(\omega_c t) - \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d))\sin(\omega_c t)$$

y al pasarla por el detector de envolvente tenemos que

$$A_v(t) = A_c\sqrt{(1 + \mu x(t))^2 + \alpha^2\left(1 + \mu x(t - t_d)\right)^2}$$

La señal detectada es:

$$r(t) = A_v(t) - \mathbb{E}\left\{A_v(t)\right\}$$

(d) Como $\omega_c t_d = \pi/2$, tenemos que

$$t_d = \frac{\pi}{2w_c} = \frac{1}{4f_c} = \frac{T_c}{4}$$

donde T_c es el período de la portadora.
Para poder utilizar un detector de envolvente debe cumplirse que la frecuencia de la portadora debe ser mucho mayor que el ancho de banda del mensaje,

$$f_c \gg W.$$

Como la frecuencia de las componentes de la señal $x(t)$ son mucho menores que la frecuencia de la portadora, las variaciones de $x(t)$ en un período de la portadora serán despreciableas. Entonces se puede asumir que $x(t)$ cambia muy poco en un cuarto de ciclo de la portadora y por lo tanto $x(t) \approx x(t - t_d)$. Finalmente

$$A_v(t) = A_c\sqrt{(1+\mu x(t))^2 + \alpha^2\left(1+\mu x(t-t_d)\right)^2} \approx A_c(1+\mu x(t))\sqrt{1+\alpha^2}.$$

que luego de eliminar la continua resulta proporcional al mensaje:

$$r(t) \approx A_c \mu x(t)\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Problema 2

(a)

(b) Si $d_k = \{x(2kT_b), x((2k+1)T_b)\} \in \{0,1\}^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_T(t) = \sum_k a_k p(t - 2kT_b)\cos w_c t$$

donde

$$a_k = \begin{cases} -3A & si \quad d_k = \{0,0\} \\ -A & si \quad d_k = \{0,1\} \\ A & si \quad d_k = \{1,1\} \\ 3A & si \quad d_k = \{1,0\} \end{cases}$$

y $p(t)$ es un pulso rectangular de ancho $2T_b$.

$$G_{x_T}(f) = \frac{1}{4}\frac{1}{4T_b}(A^2 + 9A^2)[|P(f+f_c)|^2 + |P(f-f_c)|^2]$$

y como $|P(f)|^2 = 4T_b^2 sinc^2(2fT_b)$, tenemos que

$$G_{x_T}(f) = 2A^2T_b[sinc^2(2(f+f_c)T_b) + sinc^2(2(f-f_c)T_b)]$$

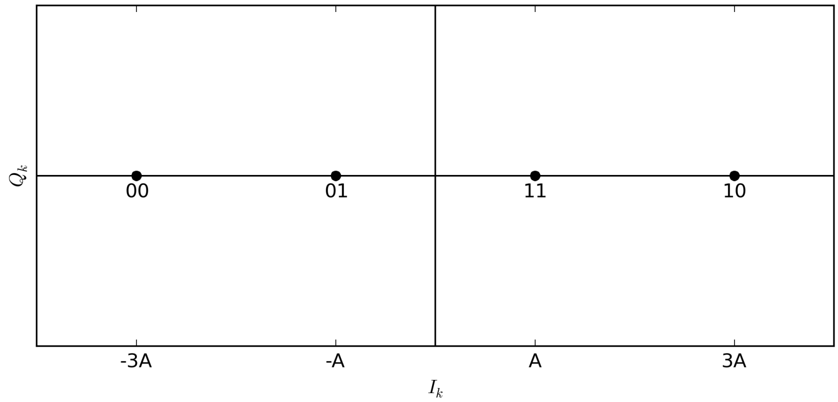
(d) Si llamamos s_d al símbolo transmitido, entonces

$$s_d = \begin{cases} -3A\cos w_c t & si \quad d = \{0,0\} \\ -A\cos w_c t & si \quad d = \{0,1\} \\ A\cos w_c t & si \quad d = \{1,1\} \\ 3A\cos w_c t & si \quad d = \{1,0\} \end{cases}$$

y la energía de cada símbolo es

$$E_{s_d} = \int_0^{2T_b} s_d^2(t)dt = \begin{cases} 9A^2T_b & si \quad d = \{0,0\} \text{ o } \{1,0\} \\ A^2T_b & si \quad d = \{0,1\} \text{ o } \{1,0\} \end{cases}$$

(e)



(f) En la figura anterior se observa que entre símbolos adyacentes solo cambia un bit, por lo tanto es un mapeo de Gray.

(g) Como los bits son equiprobables el umbral óptimo es cero. La probabilidad de error del primer bit es

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2 \times 9A^2T_b}{\eta}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2 \times A^2T_b}{\eta}}\right)$$

(h) Podemos aproximar la probabilidad de error del primer bit como

$$P_e \approx \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2 \times A^2T_b}{\eta}}\right)$$

y como P_e debe ser menor o igua a 10^{-6}

$$\sqrt{\frac{2 \times A^2T_b}{\eta}} \geq 4.61$$

entonces

$$r_b = \frac{1}{T_b} \leq \frac{2A^2}{\eta(4.61)^2} \approx 9.4Mbps$$