Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

29 de julio de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Se desea transmitir una señal $x(t)$ con potencia $S_x = 1$ y ancho de banda $W = 5kHz$ por un cable coaxial con atenuación tal que a $10km$ la señal se ve atenuada en $20dB$. El receptor introduce ruido AWGN con $\frac{\eta}{2} = 5 \times 10^{-9} W/Hz$ y es predominante frente al ruido introducido en el canal. La potencia de transmisión es de $S_T = 50mW$.

(a) Se tiene un modulador AM con índice de modulación μ que puede tomar los valores $\mu = \{0.4; 0.7; 1\}$. Calcular los valores posibles de μ para los cuales es posible transmitir la señal $x(t)$ y obtener una $SNR_D \geq 20dB$ a una distancia de $3km$ del transmisor.

(b) Se opta por cambiar por un modulador FM con índice de modulación $f_\Delta = 75kHz$ (transmisor FM comercial). ¿Es posible transmitir la señal $x(t)$ y obtener una $SNR_D \geq 20dB$ a una distancia de $3km$ del transmisor? Justifique.

(c) Calcular la potencia mínima necesaria S_T^* para obtener una $SNR_D \geq 55dB$ a $10km$ del transmisor.

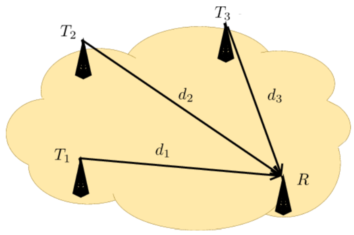
(d) Para la potencia hallada en la parte anterior S_T^*, calcular la distancia d^* máxima a la cual alguien puede aún demodular la señal. ¿Con qué SNR_D^* lo hace?

Se quiere enviar la señal $x(t)$ a un receptor R con una SNR_D mayor a un cierto umbral. Como los transmisores disponibles son de baja potencia se decide disponer tres de ellos como muestra el diagrama de la figura 1(a). Los tres transmisores T_1, T_2 y T_3 se encuentran a distancias $d_1 = 7km$, $d_2 = 10km$ y $d_3 = 5km$ del receptor R respectivamente. Supondremos que envían la misma señal, se encuentran sincronizados y son direccionales, de modo que no hay interferencia entre ellos. También, que transmiten a frecuencias f_1, f_2 y f_3. Supondremos que todas las antenas transmiten con una misma potencia S_T. En la figura 1(b) se muestra un diagrama de bloques del receptor.

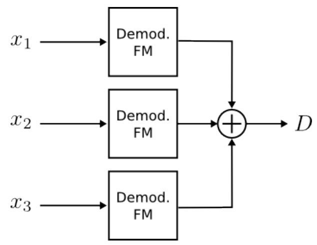
(e) Determinar qué condiciones deben cumplir las frecuencias f_1, f_2 y f_3 para que no haya interferencia en recepción.

(f) Deducir detalladamente la expresión para SNR_D en el punto D.

(g) Calcular la potencia mínima necesaria S_T que con la que cada antena debe ser capaz de transmitir para que la $SNR_D \geq 60dB$.



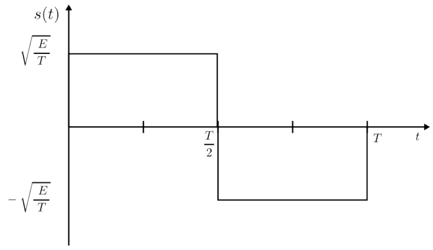
(a) Esquema de antenas



(b) Receptor

Problema 2

Sea quiere utilizar el pulso $s(t)$ de la siguiente figura como pulso conformador de ancho T, para la transmisión de una señal digital. El canal cumple con las hipótesis usuales agregando ruido AWGN con densidad espectral de potencia (DEP) $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$.



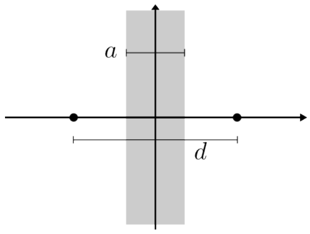
(a) Determinar la energía del pulso $s(t)$.

(b) Dibujar la forma del pulso recibido si el receptor es un filtro apareado de respuesta $h(t)$. Determinar $h(t)$ y comentar sus características.

(c) Determinar la energía de bit (E_b) de un sistema binario que trasmite $s(t)$ cuando envía un 1 y $-s(t)$ cuando envía un 0 .

(d) Calcular la probabilidad de error en función E_b si los símbolos son equiprobables y el umbral es óptimo.

Se quiere evaluar cómo se afecta la probabilidad de error (P_e) cuando se ustiliza modulación BPSK con decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección (ver la siguiente figura). Asuma que los símbolos son equiprobables y se define $\alpha = \frac{a}{d}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ donde d es la separación entre los símbolos en detección y a el ancho de la zona de borrado.



(e) Hallar las expresiones para P_e y la P_{bor} (probabilidad de borrado) como una función de E_b y α.

(f) Determinar el valor de α para que se cumpla que $P_{\text{bor}} = 2P_e$, suponiendo que $P_e = 10^{-5}$. Calcular la SNRpara este caso.

Observación: La motivación para buscar $P_{\text{bor}} = 2P_e$ en la parte (f) viene dada porque generalmente un código corrector de errores, para una distancia de código dada, puede detectar el doble de los errores de los que puede corregir.

Solución

Problema 1

(a) Debemos imponer:

$$SNR_{D_{AM}} = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\frac{S_T}{W\eta L(x)} \leq 10^{\frac{20}{10}} = 100.$$

Sabemos que $\alpha = \frac{20dB}{10km} = 2db/Km$, entonces $L(x) = 10^{\frac{\alpha x}{10}}$. Como $x = 3km$, $L(3km) = 10^{\frac{3*2}{10}} = 3.98$.

Calculando $SNR_{D_{AM}}$ para los tres valores de μ obtenemos 34.6, 82.6 y 125.6 respectivamente. Por tanto, el único índice aceptable es $\mu = 1$.

(b) En FM el ancho de banda de la señal es ahora $B_T = 2DW = 2f_\Delta = 150kHz$, ya que $f_\Delta \gg W$. Por otra parte:

$$SNR_{D_{FM}} = \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{W^3\eta L} = \frac{3\times 75000^2 \times 1 \times 0.05}{5000^3 \times 3.98 \times 10^{-8}} = 1.7\times 10^5 \geq 100.$$

Sabemos que para poder demodular debemos estar por encima del umbral FM en recepción:

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{S_T^*}{L\eta B_T} = \frac{S_T^*}{L\eta B_T} \geq 10.$$

Sin embargo,

$$SNR_R = \frac{0.05}{3.98\times 10^{-8}\times 150000} = 8.37 < 10.$$

Por tanto estamos por debajo del umbral y no es posible demodular la señal.

(c)

$$SNR_{D_{FM}} = \frac{3f_\Delta^2 S_x S_T}{W^3\eta L} \geq 10^{\frac{55}{10}} = 10^{5.5}.$$

Despejando S_T:

$$S_T \geq \frac{10^{5.5}W^3\eta L(10km)}{3f_\Delta^2 S_x} = \frac{10^{5.5}\times 5000^3 \times 10^{-8}\times 100}{3\times 75000^2 \times 1} = 2.3W.$$

El mínimo S_T^* se obtiene en la igualdad.
Verificamos que estamos sobre el umbral de FM:

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{S_T^*}{L\eta B_T} = \frac{2.3}{100\times 10^{-8}\times 150000} = 15.6 \geq 10$$

(d) La señal se pierde cuando a distancia d^* la SNR_R cae a 10.

$$L^* = \frac{S_T^*}{10\eta B_T} = \frac{S_T^*}{10\eta B_T} = \frac{2.3}{10\times 10^{-8}\times 150000} = 153.$$

Por tanto, $d^* = \frac{10}{2}\log_{10} L^* = 10.9km$.

$$SNR_D^* = \frac{3\times f_\Delta^2 S_x S_T^*}{W^3\eta L^*} = \frac{3\times 75000^2\times 1\times 2.3}{5000^3\times 10^{-8}\times 153} = 2\times 10^5 = 53dB.$$

(e) Como el ancho de banda de la señal $B_T = 150kHz$, las frecuencias de transmisión deben estar separadas al menos $150kHz$ entre sí.

(f) $SNR_D = S_D/N_D$. En el punto D tenemos $y_D(t) = f_\Delta x_1(t) + f_\Delta x_2(t) + f_\Delta x_3(t) + \xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t)$, donde $x_i(t) = x(t)$ corresponde a la componente de señal demodulada, que es la misma para cada bloque, y $\xi_i(t)$ corresponde a la componente de ruido introducido por el canal. En este último caso, las potencias de ruido no serán la misma porque dependen de la atenuación $L_i = L(d_i)$.

$$S_D = 9 f_\Delta^2 S_x.$$

$$N_D = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{\eta W^3 L_1}{3S_T} + \frac{\eta W^3 L_2}{3S_T} + \frac{\eta W^3 L_3}{3S_T} = \frac{\eta W^3 (L_1 + L_2 + L_3)}{3S_T}.$$

Ya que la potencia de transmisión es la misma. Por tanto,

$$SNR_D = \frac{27 f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta W^3 (L_1 + L_2 + L_3)}.$$

(g)

$$SNR_D = \frac{27 f_\Delta^2 S_x S_T}{\eta W^3 (L_1 + L_2 + L_3)}.$$

Con potencia mínima debemos llegar a $SNR_D = 60dB = 10^6$. Además $L_1 = L(7km) = 10^{\frac{2.7}{10}} = 25$, $L_2 = L(10km) = 10^{\frac{2.10}{10}} = 100$, y $L_3 = L(5km) = 10^{\frac{2.5}{10}} = 10$.

Despejando,

$$S_T = \frac{SNR_D \eta W^3 (L_1 + L_2 + L_3)}{27 f_\Delta S_x}$$

$$S_T = \frac{10^6 \times 10^{-8} \times 5000^3 \times 135}{27 \times 75000^2 \times 1} = 1.1W$$

Problema 2

(a) $E_s = \int_0^T s(t)^2 dt = \frac{2E}{T}\frac{T}{4}2 = E$

(b) $h(t) = s(T-t)$. Entonces el pulso recibido tiene la forma de la Figura 1.

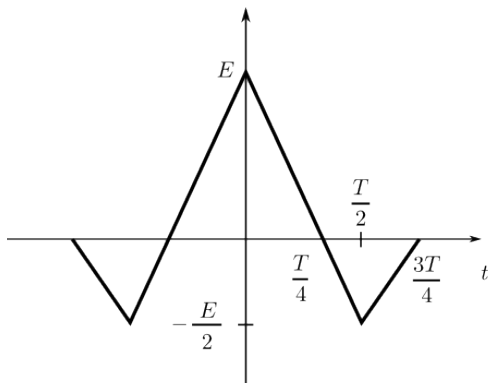


Figura 1: Pulso en recepción.

(c) $E_b = p_1 \int_0^T s(t)^2 dt + p_0 \int_0^T (-s(t))^2 dt + = p_1 E + p_0 E = E.$

(d) $P_e = p_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 - V_T}{\sigma}\right) + p_0 Q\left(\frac{V_T - \hat{a}_0}{\sigma}\right)$. Donde $\hat{a}_1 = E$, $\hat{a}_0 = -E$, $V_T = 0$ y $\sigma = \frac{\eta}{2}\int |S(f)^2| df = \frac{\eta}{2}\int |s(t)^2| dt = \frac{\eta}{2}E$ Si $p_0 = p_1 \Rightarrow P_e = Q\left(\frac{E}{\sqrt{\frac{\eta E}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) = Q(k)$

(e)

$$P_e = p_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 + a/2}{\sigma}\right) + p_0 Q\left(\frac{a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d/2 + a/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{(1+\alpha)\, d}{2\sigma}\right) = Q\left((1+\alpha)\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) = Q\left((1+\alpha)\, k\right)$$

$$P_{\text{bor}} = 1 - P_e - P_{\text{correcto}}$$

$$P_{\text{correcto}} = p_1\left(1 - Q\left(\frac{\hat{a}_1 - a/2}{\sigma}\right)\right) + p_0\left(1 - Q\left(\frac{-a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right)\right) = 1 - Q\left((1-\alpha)\, k\right)$$

$$P_{\text{bor}} = -Q\left((1+\alpha)\, k\right) + Q\left((1-\alpha)\, k\right)$$

(f)

$$P_e = 10^{-5} \Rightarrow (1+\alpha)\, k = Q^{-1}\left(10^{-5}\right) = 4.3$$

$$P_{\text{bor}} = 2P_e = 2.10^{-5} \Rightarrow (1-\alpha)\, k = Q^{-1}\left(3.10^{-5}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{4.3}{4} = 1.075 \Rightarrow \alpha = 0.0361$$

$$k = 4.15$$