Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

2 de agosto de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Se desea transmitir una señal $x(t)$ utilizando modulación FM. La señal tiene potencia $S_x = \frac{1}{2}$, $|x(t)| < 1$ y ancho de banda $W_x = 15$ kHz. Ésta es transmitida por el aire, considerado como un canal con ruido AWGN con $\eta = 10^{-8}$ Watt/Hz y una atenuación $L = 20$ dB al punto de interés.

(a) Dar un diagrama de bloques del sistema a utilizar. Describir brevemente las funciones de cada bloque. Mostrar en qué puntos del diagrama se miden la SNR_R y la SNR_D.

(b) Bosquejar en forma genérica la variación de $\frac{S_R}{\eta W}$ en función de $\frac{f_\Delta}{W}$, paramétrico en la SNR_D. Indicar la región de trabajo para un diseño adecuado.

(c) Calcular el ancho de banda B_{T1} necesario si se quiere utilizar la mínima potencia transmitida S_{T1} para obtener $\text{SNR}_D = 50$ dB; hallar S_{T1}. Señalar en la gráfica anterior el punto de funcionamiento recién calculado.

Dadas las reglamentaciones de la URSEC es necesario reducir el ancho de banda en un 25 % (B_{T2}).

(d) Calcular la nueva potencia de transmisión S_{T2} para mantener la misma SNR_D. Indicar el nuevo punto de trabajo en el gráfico de la parte (b).

Se desea incrementar la SNR_D al máximo posible manteniendo la potencia de transmisión de la parte anterior S_{T2}.

(e) Determinar el ancho de banda B_{T3} necesario. Hallar la nueva SNR_D. Indicar el nuevo punto de trabajo en el gráfico de la parte (b).

Con el objetivo de reducir la potencia de transmisión manteniendo la SNR_D se coloca un repetidor analógico equidistante del transmisor y del receptor. La ganancia del repetidor es tal que compensa la reducción de potencia en el canal.

(f) Hallar la mínima S_{T3} válida.

Recordar que la reducción *ideal* de potencia recibida al transmitir por el aire está dada por la ecuación de Friis

$$L = \frac{S_T}{S_R} = \left(\frac{4\pi df}{c}\right)^2$$

donde $c = 3 \times 10^8$ metros por segundo es la velocidad de la luz en el vacío.

Problema 2

Una señal de voz, $x(t)$, de rango dinámico [-1,1], ancho de banda $W = 3,4$ kHz y potencia S_x se transmite con un sistema PCM. Se muestrea a una frecuencia $f_s = 8$ kHz, se codifican con una codificación binaria, se transmiten utilizando señalización polar y un pulso conformador rectangular NRZ adecuado. La probabilidad de transmitir un '1' es p. El canal introduce ruido AWGN con una densidad espectral de potencia $\eta/2$ y atenuación L en potencia. En el instante de muestreo la amplitud de la señal recibida es A_R.

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario de q niveles (n bits), con cuantificación uniforme. Explicar el funcionamiento de cada bloque.

Se desea recibir la señal con una SNR_D dada, teniendo la mínima potencia de ruido de cuantificación posible.

(b) Determinar los parámetros de funcionamiento del sistema (q, n, ancho de banda de transmisión B_T), dando los criterios de elección de los mismos.

(c) Determinar la entropía de la fuente y hallar la probabilidad p^* que la maximiza.

(d) Bosquejar la SNR_D en función de SNR_R indicando la zona de trabajo óptima. Determinar la amplitud de la señal a enviar A_T para trabajar en esa zona con $p = p^*$.

(e) Esbozar el espectro de la señal conformada para una probabilidad p genérica. ¿Cómo afecta p la forma del espectro?

(f) ¿El pulso conformador cumple con los criterios para que no exista Interferencia Intersimbólica? ¿Por qué?

(g) Deducir una expresión para la probabilidad de error, P_e, suponiendo un filtro de recepción LPF de ancho de banda B_T, para p cualquiera.

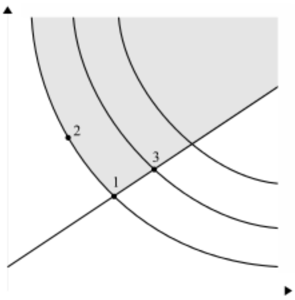
(h) Diseñar una etapa de recepción óptima para minimizar la P_e, para p cualquiera.

Solución

Problema 1

(a) Ver teórico.

(b) Hay dos condiciones que se deben cumplir. La primera es la condición de umbral; la cual es una relación lineal entre γ_{th} y D. La segunda es la condición de la SNR_D; en ésta es γ inversamente proporcional a D^2. Estas condiciones se bosquejan de la siguiente forma



La región de trabajo es sobre el umbral y sobre la SNR_D pedida, esta región está pintada de gris en la figura.

(c) La SNR_D es $3D^2 S_x \gamma$ siendo $\gamma = \frac{S_T}{\eta L W_x}$.
Para minimizar la potencia transmitida debemos trabajar en el umbral por lo que se cumple:

$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} = 10$$

Combinando las ecuaciones y tomando $B_T = 2(D+2)W_x$ nos queda:

$$\text{SNR}_D = 3D^2 S_x \; 2(D+2)10$$

Para $D \gg 2$ y los datos del problema esto es $\text{SNR}_D \approx 30D^3$ por lo que se obtiene para $\text{SNR}_D = 50$ dB que $D_1 = 15$ y $B_{T1} = 510$ kHz. Despejando S_T queda:

$$S_T = \frac{\text{SNR}_D \eta L W_x}{3D^2 S_x}$$

por lo que $S_{T1} = 4.4$ Watt.
Este punto en la gráfica es el que corresponde al número 1.

(d) El nuevo ancho de banda es $B_{T2} = 0.75\ B_{T1} = 382.5$ kHz, por lo que queda $D_2 = 10.75$. En este caso $S_{T2} = 8.6$ Watt
Aquí se aprecia el intercambio entre ancho de banda y potencia de FM, para reducir el ancho de banda es necesario utilizar una mayor potencia de transmisión.
Este punto en la gráfica es el que corresponde al número 2.

(e) Nuevamente se quiere la potencia mínima de transmisión por lo que se trabaja en el umbral. Despejando queda $B_T = \frac{S_T}{\eta L \text{ SNR}_R}$ con $S_T = S_{T2}$ y $\text{SNR}_R = 10$ se obtiene $B_{T3} = 860$ kHz. En este caso $D_3 = 26.7$ y la nueva $\text{SNR}_D = 61$ dB.
Es claro que este punto de funcionamiento no es válido dado que el ancho de banda necesario no cumple las exigencias del ente regulador.
Este punto en la gráfica es el que corresponde al número 3.

(f) Se tiene que para una distancia d, la pérdida introducida en el canal es

$$L = \left(\frac{4\pi df}{c}\right)^2 = 10^2$$

Cuando se coloca un repetidor equidistante la pérdida en cada tramo es

$$L_r = \left(\frac{4\pi d/2f}{c}\right)^2 = \left(\frac{4\pi df}{c}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{10^2}{4} = 25$$

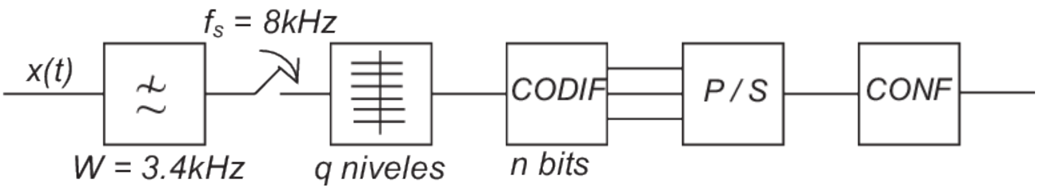
$$S_R = S_{T3}\frac{L_r}{L_r L_r} = \frac{S_{T3}}{L_r}$$

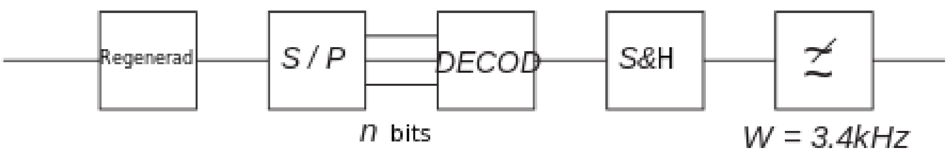
$$N_R = \left(\frac{\eta L_r}{L_r} + \eta\right) B_{T3} = 2\eta B_{T3}$$

$$SNR_R = \frac{S_{T3}}{L_r 2\eta B_{T3}} > 10 \Rightarrow S_{T3} = 4.3W$$

Problema 2

(a)





(b) Asumiremos que estamos trabajando sobre el umbral P.C.M. Para poder garantizar un valor dado de SNR_D (que tomaremos igual a SNR_D^*), se deberá cumplir que:

$$\text{SNR}_D^* \leq 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W} \Rightarrow q \geq \sqrt{\frac{\text{SNR}_D^*}{3S_x} . \frac{2W}{f_s}}$$

A su vez, para que la potencia del error de cuantificación sea mínima, es necesario que el valor de n sea el mínimo posible. Recordando que debe cumplirse también que $q \leq 2^n$, luego se tiene que:

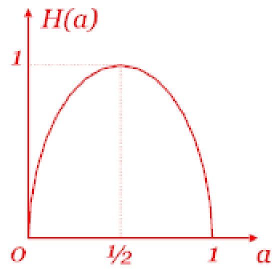
$$n \geq \log_2(q) = \log_2\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}_D^*}{3S_x} \cdot \frac{2W}{f_s}}\right)$$

Dado que n debe ser un número natural, se desprende que el valor de n es $\left\lceil \log_2\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}_D^*}{3S_x} \frac{2W}{f_s}}\right)\right\rceil$.
Finalmente, también debe cumplirse que $B_T \geq (n\ f_s)/2$ (lo cual permite asegurar que no se tendrá Interferencia Intersimbólica conformando con un pulso de Nyqvist adecuado). Tomando el mínimo valor de B_T que cumple esto, se tiene entonces que $B_T = (n\ f_s)/2$, donde n es el calculado más arriba.

(c) La entropía de la fuente es:

$$H(A) = \sum_{i=1}^{2} p_i.I_i = \sum_{i=1}^{2} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = p \log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1-p)\log_2\left(\frac{1}{1-p}\right) = \Omega(p)$$

donde $i = 1,\ 2$ representa a los dos símbolos ('0' y '1') que emite la fuente.
La forma de $\Omega(p)$ es:



Se puede ver que presenta un máximo en $p = 1/2$.

(d) Pedir que la SNR_D sea independiente del ruido introducido en el canal, equivale a pedir que el único ruido relevante sea el de cuantificación (o sea, que el ruido de decodificación no sea importante). Para que esto ocurra, un criterio razonable es pedir que $P_e \leq 10^{-5}$. Como $p = 1/2$, entonces el umbral óptimo será $V = (A_R - A_R)/2 = 0$, y $P_e = Q(A_R/\sqrt{\eta B_T})$. Entonces, deberá cumplirse:

$$Q\left(\frac{A_R}{\sqrt{\eta B_T}}\right) \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{A_R}{\sqrt{\eta B_T}} \geq 4.3$$

Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, luego el valor de $\text{SNR}_{R_{mín}}$ será:

$$\text{SNR}_{R_{mín}} = 4.3^2 \approx 18.5$$

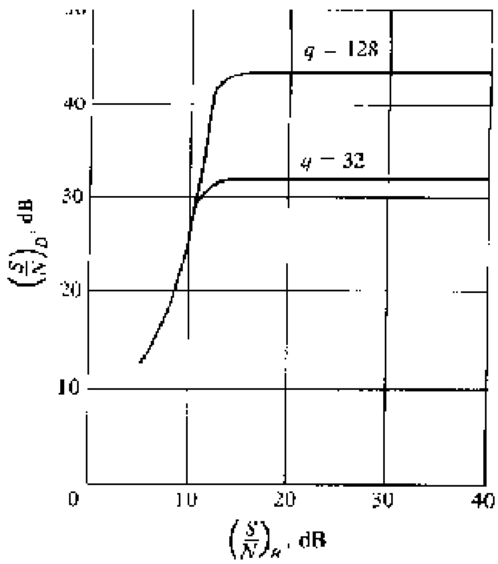
Sabemos que, dependiendo del valor de P_e, el ruido de decodificación será más o menos relevante que el de cuantificación. Más específicamente, se tiene que:

$$\text{SNR}_D = \frac{3q^2 S_x}{1 + 4q^2 P_e} \frac{f_s}{2W}$$

Luego, dependiendo de la relación entre P_e y $4q^2$, el valor de SNR_D será diferente. Así, se cumple:

- Si $P_e \ll \frac{1}{4q^2}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3q^2 S_x f_s}{2W}$, independiente de la SNR_R.
- Si $P_e \gg \frac{1}{4q^2}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4P_e}$. Como $P_e = Q(\sqrt{\text{SNR}_R})$ (ya que se está trabajando con señalización polar y símbolos equiprobables), entonces se cumple que $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4Q(\sqrt{\text{SNR}_R})}$.

En base a estas observaciones, podemos bosquejar la forma de SNR_D variando respecto a SNR_R:



La zona de trabajo óptima se tiene justo en el umbral, es decir, cuando $\text{SNR}_R \approx 18.5$. Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, entonces se debe cumplir que $A_R = \sqrt{18.5\eta B_T}$. A su vez, $A_R = A/\sqrt{L}$, y entonces $A = \sqrt{18.5\eta B_T L}$.

(e) La señal conformada, $x_c(t)$, es una señal PAM, por lo que su espectro es de la forma:

$$G_{x_c}(f) = \frac{\sigma_x^2 |S(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| S\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

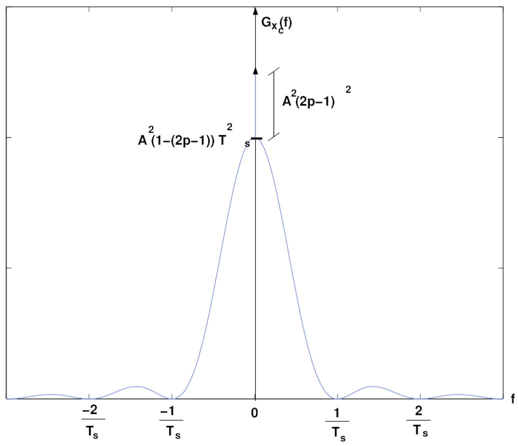
donde:

$$m_x = A.p + (-A).(1-p) = A.(2p-1)$$
$$\sigma_x^2 = R_x[0] - m_x^2 = A^2.p + (-A)^2.(1-p) - A^2(2p-1)^2 = A^2(1-(2p-1)^2)$$
$$|S(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

De la forma de $|S(f)|^2$ se desprende que $|S(k/T)|^2 = T^2$ si $k = 0$, y $|S(k/T)|^2 = 0$ en otro caso (considerando k entero). Por lo tanto, la densidad espectral de potencia de la señal conformada queda:

$$\begin{aligned} G_{x_c}(f) &= \frac{A^2(1-(2p-1)^2)}{T} T^2 \text{sinc}^2(fT) + \frac{A^2(2p-1)^2}{T^2} T^2 \delta(f) \\ &= A^2(1-(2p-1)^2) T \text{sinc}^2(fT) + A^2(2p-1)^2 \delta(f) \end{aligned}$$

Esta función tiene la forma:



El valor de p afecta a los valores de m_x y σ_x. Específicamente, si $p = 1/2$, entonces $m_x = 0$ y no se tiene una delta en $f = 0$ en el espectro, la cual no aportaba información. Esto es deseable ya que permite ahorrar potencia de transmisión, que antes era emitida pero no aprovechada. Con este valor de p, $G_{x_c}(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT)$.

(f) Para que no haya Interferencia Intersimbólica, deben cumplirse las siguientes condiciones:

- $s(0) = 1$.
- $s(kT) = 0$ con k entero no nulo.
- $S(f) = 0 \; \forall |f| \geq B_T$.

Esta última condición no se cumple, por lo que la respuesta es no.

(g) Como calculamos B_T asumiendo que no hay ISI, luego en recepción lo que se tiene son dos campanas gaussianas centradas en A_R y $-A_R$, de ancho σ y ponderadas por p y $(1 - p)$.
Si V es el umbral de decisión, entonces:

$$P_e = p.Q\left(\frac{A_R - V}{\sigma}\right) + (1-p).Q\left(\frac{-A_R + V}{\sigma}\right)$$

Como $\sigma^2 = \eta B_T$, entonces $\sigma = \sqrt{\eta B_T}$, y por lo tanto:

$$P_e = p\ Q\left(\frac{A_R - V}{\sqrt{\eta B_T}}\right) + (1-p)\ Q\left(\frac{-A_R + V}{\sqrt{\eta B_T}}\right)$$

(h) Cómo p es genérico es necesario utilizar un Filtro de Correlación. Por lo tanto, en recepción se tendrá algo de la forma: