Sistemas de Comunicación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

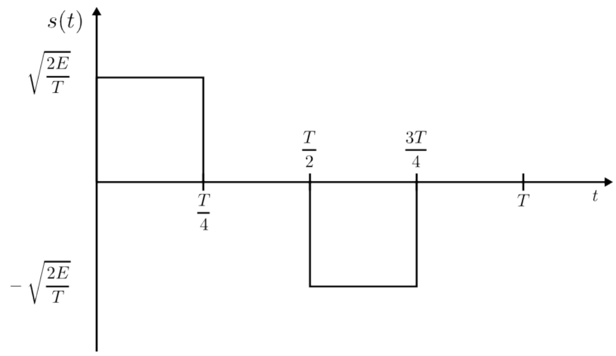
4 de febrero de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Sea quiere utilizar el pulso $s(t)$ de la siguiente figura como pulso conformador de ancho T, para la transmisión de una señal digital. El canal cumple con las hipótesis usuales agregando ruido AWGN con densidad espectral de potencia (DEP) $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$.



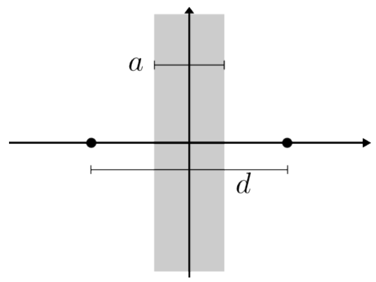
(a) Determinar la energía del pulso $s(t)$.

(b) Dibujar la forma del pulso recibido si el receptor es un filtro apareado de respuesta $h(t)$. Determinar $h(t)$ y comentar sus características.

(c) Determinar la energía de bit (E_b) de un sistema binario que trasmite $s(t)$ cuando envía un 1 y $-s(t)$ cuando envía un 0 .

(d) Calcular la probabilidad de error en función E_b si los símbolos son equiprobables y el umbral es óptimo.

Se quiere evaluar cómo se afecta la probabilidad de error (P_e) cuando se ustiliza modulación BPSK con decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección (ver la siguiente figura). Asuma que los símbolos son equiprobables y se define $\alpha = \frac{a}{d}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ donde d es la separación entre los símbolos en detección y a el ancho de la zona de borrado.



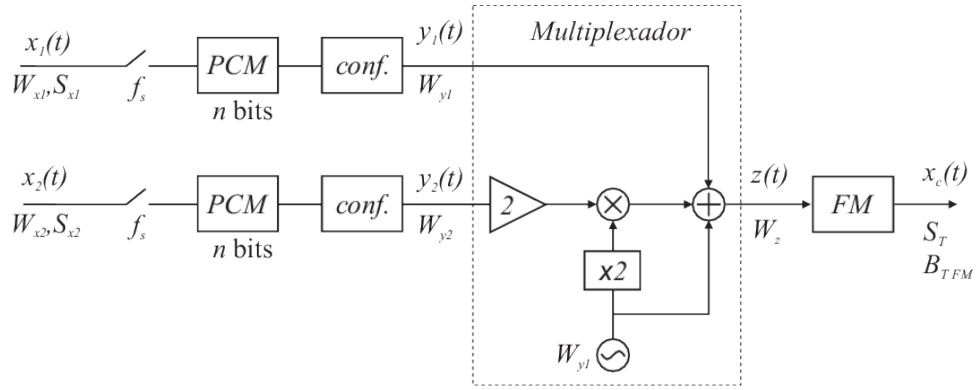
(e) Hallar las expresiones para P_e y la P_{bor} (probabilidad de borrado) como una función de E_b y α.

(f) Determinar el valor de α para que se cumpla que $P_{\text{bor}} = 2P_e$, suponiendo que $P_e = 10^{-5}$. Calcular la SNRpara este caso.

Observación: La motivación para buscar $P_{\text{bor}} = 2P_e$ en la parte (f) viene dada porque generalmente un código corrector de errores, para una distancia de código dada, puede detectar el doble de los errores de los que puede corregir.

Problema 2

Se desean transmitir dos señales de audio $x_1(t)$ y $x_2(t)$, ambas con ancho de banda $W = 15\ kHz$ y potencia $S_x = 1/2$. Se desea obtener una $\text{SNR}_D \geq 49\ dB$ para cada una de las señales. Para su transmisión las señales serán digitalizadas y codificadas con PCM binario, utilizando señalización polar, pulsos rectangulares de altura A y ancho $T_s = 1/f_s$. Las señales PCM se multiplexan en frecuencia como se muestra en el siguiente diagrama; sea $z(t)$ la señal multiplexada. La señal $z(t)$ es trasmitida utilizando un sistema FM, con indice de modulación $D = 3$.



(a) Dar un diagrama de un sistema que permita recuperar las señales $x_i(t)$ a partir de $x_c(t)$.

(b) Hallar los parámetros de los sistemas PCM que cumplan con los requerimientos.

(c) ¿Cuál es el ancho mínimo, W_{y_i}, de cada canal si se desea recuperar la forma de los pulsos?

(d) Calcular la SNR_R mínima a la entrada del decodificador PCM para cumplir con la condición de umbral PCM.

(e) Bosquejar y explicar el espectro de $z(t)$.

(f) Calcular la SNR a la salida del detector de FM para las señales y_i recuperadas si el canal introduce un ruido AWGN de DEP $\frac{\eta}{2}$ y la potencia de la señal recibida es S_R.

(g) Si el canal tiene una atenuación (en potencia) $L = 10$ y $\eta = 10^{-7} W/Hz$, y los pulsos tiene amplitud $A = 1$, calcular la mínima potencia de transmisión S_T para cumplir con todos los umbrales del sistema.

Solución

Problema 1

(a) $E_s = \int_0^T s(t)^2 dt = \frac{2E}{T}\frac{T}{4}2 = E$

(b) $h(t) = s(T-t)$. Entonces el pulso recibido tiene la forma de la Figura 1.

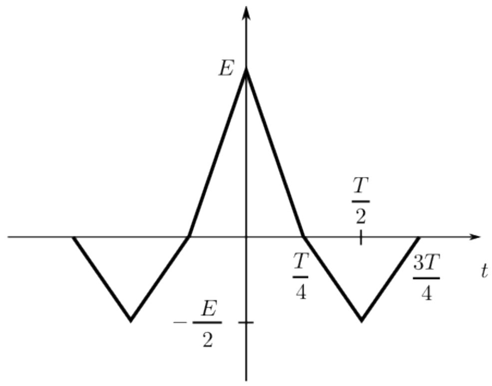


Figura 1: Pulso en recepción.

(c) $E_b = p_1 \int_0^T s(t)^2 dt + p_0 \int_0^T (-s(t))^2 dt + = p_1 E + p_0 E = E$.

(d) $P_e = p_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 - V_T}{\sigma}\right) + p_0 Q\left(\frac{V_T - \hat{a}_0}{\sigma}\right)$. Donde $\hat{a}_1 = E$, $\hat{a}_0 = -E$, $V_T = 0$ y $\sigma = \frac{\eta}{2}\int |S(f)^2| df = \frac{\eta}{2}\int |s(t)^2| dt = \frac{\eta}{2}E$ Si $p_0 = p_1 \Rightarrow P_e = Q\left(\frac{E}{\sqrt{\frac{\eta E}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) = Q(k)$

(e)

$$P_e = p_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 + a/2}{\sigma}\right) + p_0 Q\left(\frac{a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d/2 + a/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{(1+\alpha)d}{2\sigma}\right) = Q\left((1+\alpha)\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) = Q((1+\alpha)k)$$

$$P_{\text{bor}} = 1 - P_e - P_{\text{correcto}}$$

$$P_{\text{correcto}} = p_1\left(1 - Q\left(\frac{\hat{a}_1 - a/2}{\sigma}\right)\right) + p_0\left(1 - Q\left(\frac{-a/2 - \hat{a}_0}{\sigma}\right)\right) = 1 - Q((1-\alpha)k)$$

$$P_{\text{bor}} = -Q((1+\alpha)k) + Q((1-\alpha)k)$$

(f)

$$P_e = 10^{-5} \Rightarrow (1+\alpha)k = Q^{-1}\left(10^{-5}\right) = 4.3$$

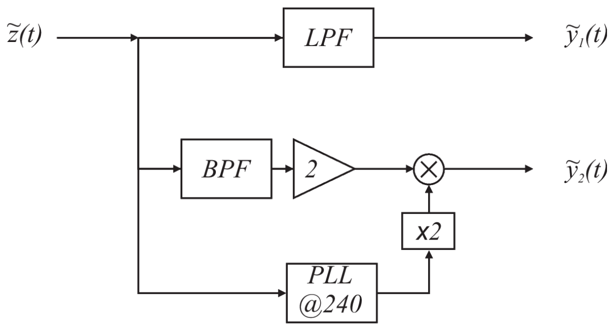
$$P_{\text{bor}} = 2P_e = 2.10^{-5} \Rightarrow (1-\alpha)k = Q^{-1}\left(3.10^{-5}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{4.3}{4} = 1.075 \Rightarrow \alpha = 0.0361$$

$$k = 4.15$$

Problema 2

(a) Diagrama

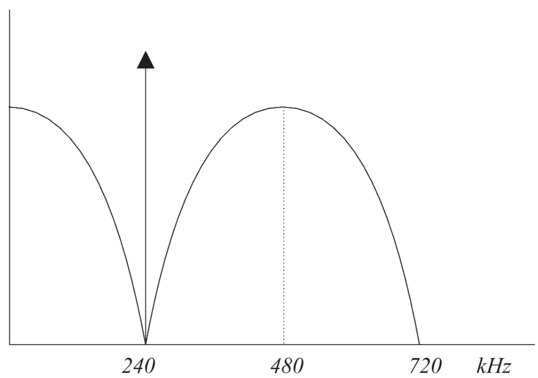


(b) Diseñamos para trabajar en el umbral PCM, la $\text{SNR}_D = 3q^2 S_x \geq 49\ dB \Rightarrow q \ \geq \ 230 \Rightarrow n = 8$ y $q = 256$.

(c) Por el teorema de muestreo, $f_s \geq 2W_{x_i} = 30\ kHz$. Tomamos la igualdad.
Para recuperar la forma del pulso necesitamos que el "canal" tenga un ancho de banda de $W_y = n \times f_s = 240kHz$

(d) La condición de umbral se expresa como $P_e \ll \frac{1}{4q^2} \cong 3.8 \times 10^{-6} \Rightarrow P_e \cong 3.8 \times 10^{-7} = Q\left(\sqrt{\text{SNR}_R}\right) \Rightarrow$ de Tabla $\text{SNR}_R = (4.9)^2 = 24$

(e) Bosquejo



La forma del espectro de y_i es proporcional al módulo al cuadrado de la TF del pulso. En este caso el lóbulo principal de un $sinc^2$.

(f) La DEP del ruido en FM es de la forma $G_n(f) = \frac{\eta f^2}{2S_R}\Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$
Las potencias de las señales y_i son $S_{y_i} = A^2$.
Para el canal 1, $N_1 = \int_{-W_y}^{W_y} G_n(f)df = \frac{\eta W_y^3}{3S_R}$
Para el canal 2, $N_2 = 2\int_{W_y}^{3W_y} G_n(f)df = \frac{26\eta W_y^3}{3S_R}$.
La $\text{SNR}_{y_1} = \frac{3f_\Delta^2 A^2 S_R}{\eta W_y^3}$.
La $\text{SNR}_{y_2} = \frac{3f_\Delta^2 A^2 S_R}{26\eta W_y^3}$.

(g) Para estar en el umbral de FM

$$\frac{S_T}{\eta L B_T} = \frac{S_T}{\eta L 2W_z(D+2)} \geq 10 \Rightarrow S_T \geq 20L\eta W_z(D+2) \Rightarrow S_T \geq 72\text{Watts}$$

Para cumplir con el umbral PCM en el canal 1

$$\mathrm{SNR}_{y_1} = \frac{3f_\Delta^2 A^2 S_T}{\eta L W_y^3} \geq 24 \tag{1}$$

Para cumplir con el umbral PCM en el canal 2

$$\mathrm{SNR}_{y_2} = \frac{3f_\Delta^2 A^2 S_T}{26\eta L W_y^3} \geq 24 \tag{2}$$

La ecuación que hay que verificar es la 2, pues más restrictiva que la 1, entonces $S_T \geq 5.5$Watts.
Por lo tanto la limitante mayor está dada por el umbral FM, entonces $S_T \geq 72$Watts.