

# Sistemas de Comunicación

## Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de julio de 2012

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Hoy es el cumpleaños de fefo, por lo que deberán saludarlo por su aniversario.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1

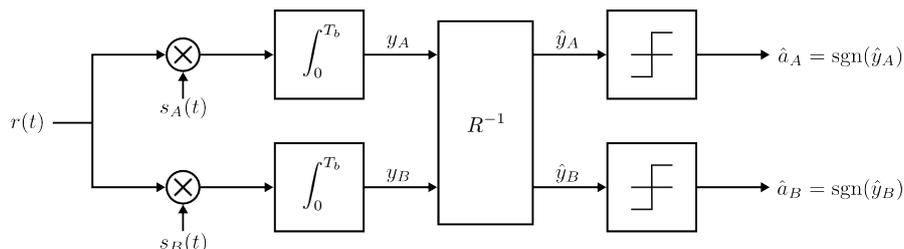
Se considera un sistema de transmisión digital bandabase con pulsos no ortogonales. El usuario  $A$  trasmite con una señal polar conformada con un pulso  $s_A(t)$  y el  $B$  con una señal polar conformada por un pulso  $s_B(t)$ . Ambos pulsos tienen duración  $T_b$  y energía  $E_P$ . La correlación cruzada entre ambos pulsos está dada por:

$$\rho_s = \frac{1}{E_P} \int_0^{T_b} s_A(t)s_B(t)dt \quad 0 \leq \rho_s < 1$$

La señal recibida es

$$r(t) = a_A s_A(t) + a_B s_B(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

donde  $a_A$  y  $a_B$  toman valores  $\pm 1$  en forma equiprobables y  $n(t)$  es el ruido que se introduce en el canal que cumple con las hipótesis usuales, esto es, AWGN con densidad espectral de potencia  $\frac{1}{2}\eta$ . Para la recepción se propone el siguiente receptor donde la matriz  $R$  es tal que  $[y_A, y_B]^T = R[\hat{y}_A, \hat{y}_B]^T$ .



- (a) Determinar la expresión de  $\hat{y}_A$  e  $\hat{y}_B$  en función de  $E_P$ ,  $a_A$ ,  $a_B$ ,  $\rho_s$  y las componentes de ruido cuando  $R$  es la matriz identidad. El receptor en este caso se llama receptor de correlación.
- (b) Caracterizar las componentes de ruido de  $y_A$  e  $y_B$ .
- (c) Determinar la probabilidad de error de bit para cada usuario  $P_e^A$  y  $P_e^B$ .
- (d) Repetir las partes anteriores para

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_s \\ \rho_s & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^{-1} = \frac{1}{1 - \rho_s^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_s \\ -\rho_s & 1 \end{pmatrix}$$

El receptor en este caso se llama receptor de decorrelación.

- (e) Comparar el desempeño de ambos receptores para  $\rho_s = 0$  y  $\rho_s = \frac{1}{2}$ , asumiendo  $E_P = 10\eta$ .

## Problema 2

Se desea estudiar un sistema para la transmisión de una señal de televisión monocromática. La señal a transmitir,  $x_{TV}(t)$ , corresponde a la suma de las componentes de audio  $x_A(t)$  y de video  $x_V(t)$ . La componente  $x_V(t)$  consiste de la señal de video  $x_v(t)$  modulada en USSB<sup>1</sup> con portadora  $f_{cv}$  y se le suma una portadora de igual frecuencia. La componente  $x_A(t)$  consiste de la señal de audio  $x_a(t)$  modulada en FM con portadora  $f_{ca} = f_{cv} + f_a$  y  $f_\Delta = 25$  kHz. Para fijar ideas asumir que la señal de audio tiene un ancho de banda  $W_a = 10$  kHz y una potencia  $S_a$ ; la señal de video tiene un ancho de banda  $W_v = 4.5$  MHz y una potencia  $S_v$ .

- (a) Dar el diagrama de bloques del transmisor. Esbozar el espectro de  $x_{TV}(t)$ .
- (b) Hallar los anchos de banda de  $x_A(t)$ ,  $x_V(t)$  y  $x_{TV}(t)$ . Dar condiciones para  $f_a$  para que el sistema sea realizable.

El rango de variación de la portadora es  $f_{cv} \in (54 \text{ MHz}, 88 \text{ MHz})$ . Se utilizará un único receptor superheterodino para la primera etapa de la demodulación. La frecuencia intermedia del receptor superheterodino es  $f_{FI} = 43$  MHz.

- (c) Dar un diagrama de bloques del receptor que recupere la señal de video y de audio.
- (d) Calcular los posibles rangos de variación de  $f_{ol}$ . ¿Cuál elegiría? ¿Por qué?
- (e) Esbozar el espectro a la salida de cada bloque.

El canal cumple con las hipótesis habituales, teniendo una atenuación  $L$  e introduciendo un ruido AWGN de densidad espectral de potencia  $\frac{1}{2}\eta$ .

- (f) Hallar la mínima potencia de transmisión de la componente de audio,  $S_A$ , que asegure una  $SNR_D \geq \Gamma$ .

La componente de video se transmite con una potencia  $S_V$  y la potencia utilizada para la portadora es  $\alpha S_V$ . Para su recepción se utiliza un detector sincrónico.

- (g) Encontrar expresiones para las componentes de ruido y de señal a la salida del receptor.

---

<sup>1</sup>Esto es una simplificación del problema, en la práctica se utiliza VSB.

# Solución

## Problema 1

(a)

$$\begin{aligned}\hat{y}_A(t) = y_A(t) &= \int_0^{T_b} r(t)s_A(t)dt = \int_0^{T_b} a_A s_A^2(t)dt + \int_0^{T_b} a_B s_B(t)s_A(t)dt + \int_0^{T_b} n(t)s_A(t)dt \\ &= a_A E_P + a_B \rho_s E_P + \int_0^{T_b} n(t)s_A(t)dt \\ \hat{y}_B(t) = y_B(t) &= a_B E_P + a_A \rho_s E_P + \int_0^{T_b} n(t)s_B(t)dt\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}E \left\{ \int_0^{T_b} n(t)s_A(t)dt \right\} &= E \left\{ \int_0^{T_b} n(t)s_B(t)dt \right\} = 0 \\ E \left\{ \left( \int_0^{T_b} n(t)s_A(t)dt \right)^2 \right\} &= E \left\{ \left( \int_0^{T_b} n(t)s_B(t)dt \right)^2 \right\} = \frac{1}{2}\eta E_P\end{aligned}$$

(c)

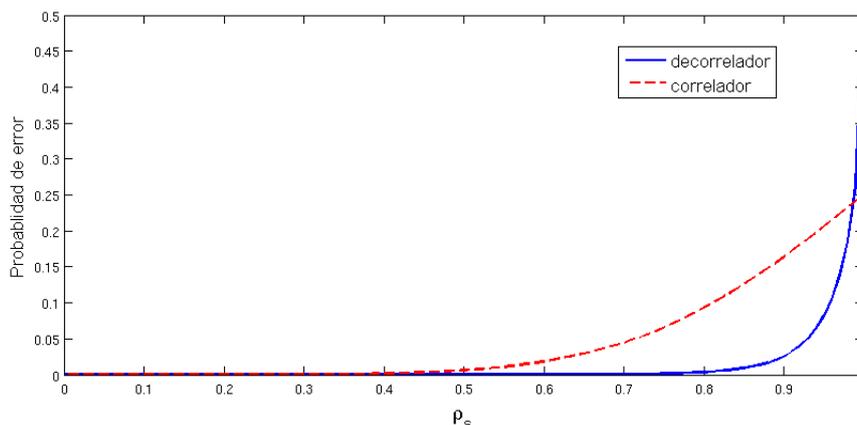
$$\begin{aligned}P_e &= 2 \left( \frac{1}{4}Q \left( \sqrt{\frac{2(1-\rho_s)^2 E_P}{\eta}} \right) + \frac{1}{4}Q \left( \sqrt{\frac{2(1+\rho_s)^2 E_P}{\eta}} \right) \right) \\ P_e &= \frac{1}{2}Q \left( \sqrt{\frac{2(1-\rho_s)^2 E_P}{\eta}} \right) + \frac{1}{2}Q \left( \sqrt{\frac{2(1+\rho_s)^2 E_P}{\eta}} \right)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\hat{y}_A(t) &= \frac{1}{1-\rho_s^2} (y_A(t) - \rho_s y_B(t)) \\ \hat{y}_A(t) = a_A E_P + \hat{n}_A(t) &= a_A E_P + \frac{1}{1-\rho_s^2} \left( \int_0^{T_b} n(t)s_A(t)dt - \rho_s \int_0^{T_b} n(t)s_B(t)dt \right) \\ E \{ \hat{y}_A(t) \} &= E \{ a_A \} E_P = \pm E_P \\ E \{ \hat{n}_A^2(t) \} &= \frac{1}{(1-\rho_s^2)^2} \left( \frac{1}{2}\eta E_P + \frac{1}{2}\rho_s^2 \eta E_P - 2\rho_s^2 \frac{1}{2}\eta E_P \right) = \frac{\eta E_P}{2(1-\rho_s^2)}\end{aligned}$$

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{2(1-\rho_s^2) E_P}{\eta}} \right)$$

(e) Con  $\rho_s$  cercano a 0 tenemos que ambos receptores tienen el mismo desempeño. Cuando la correlación entre A y B se hace mayor, el receptor de decorrelación presenta mejor desempeño (ver figura). Para  $\rho_s = \frac{1}{2}$  las probabilidades de error quedan  $6 \times 10^{-3}$  y  $5 \times 10^{-5}$ , para los receptores de correlación y decorrelación, respectivamente.



## Problema 2

(a) FALTA

(b) El ancho de banda de  $x_A(t)$  es:

$$W_A = 2 \left( \frac{f_\Delta}{W_a} + 2 \right) W_a$$

El ancho de banda de  $x_V(t)$  es:

$$W_V = W_v$$

El ancho de banda de  $x_{TV}(t)$  es:

$$W_{TV} = f_a + \frac{W_A}{2}$$

La condición para que sea realizable es que no se solapen los espectros de la señal de audio y video. Entonces tenemos:

$$f_a \geq \frac{W_A}{2}$$

(c)

(d) Tenemos dos opciones

$$\begin{aligned} f_{ol} &= f_{cv} + f_{FI} \in [97 \text{ MHz}, 131 \text{ MHz}] \Rightarrow 1, 3 : 1 \\ f_{ol} &= f_{cv} - f_{FI} \in [11 \text{ MHz}, 45 \text{ MHz}] \Rightarrow 4 : 1 \end{aligned}$$

y elegimos la opción 1 pues es la que tiene menor índice de variación.

(e)

(f) La  $SNR_D$  de FM se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$SNR_D = 3S_x D^2 \gamma = 3S_x D^2 \frac{S_R}{\eta W_a} = 3S_x D^2 \frac{S_A}{\eta L W_a} \quad (1)$$

Imponiendo que  $SNR_D \geq \Gamma$  se obtiene que

$$S_A = \frac{\Gamma W_a \eta L}{3S_x D^2} \quad (2)$$

La aproximación 1 es válida, siempre y cuando la relación señal a ruido en recepción supere al umbral FM. Esto agrega una restricción más:

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{S_A}{\eta L W_a} \geq 10 \Rightarrow S_T \geq 10L\eta W_a \quad (3)$$

La potencia mínima debe cumplir las condiciones 2 y 3. Por lo tanto:

$$S_{A\text{mín}} = \max \left\{ \frac{\Gamma \eta L}{3S_x D^2}, 10L\eta B_T \right\}$$

(g) La señal de video tiene la forma

$$x_V(t) = \frac{x_v(t) \cos(\omega_{fi}t) - \hat{x}_v(t) \sin(\omega_{fi}t)}{2} + A \cos(\omega_{fi}t)$$

De esto y la descomposición en fase y cuadratura del ruido obtenemos una expresión para la señal luego del filtro de recepción:

$$y_v(t) = \left[ A + \frac{x_v(t)}{2} + n_i(t) \right] \cos(\omega_{fi}t) - \left[ \frac{\hat{x}_v(t)}{2} + n_q(t) \right] \sin(\omega_{fi}t)$$

Luego de multiplicar por la portadora y eliminando la continua (la portadora) queda:

$$z(t) = \left[ \frac{x_v(t)}{2} + n_i(t) \right] \frac{1 + \cos(2\omega_{fi}t)}{2} - \left[ \frac{\hat{x}_v(t)}{2} + n_q(t) \right] \frac{\sin(0) + \sin(2\omega_{fi}t)}{2}$$

El filtro pasabajos elimina las componentes moduladas a frecuencia  $2f_{fi}$  ya que tiene el ancho de banda del mensaje,  $W_v$ , que es menor a  $f_{fi}$ . A la salida obtenemos:

$$\tilde{x}_v(t) = \frac{x_v(t)}{4} + \frac{n_i(t)}{2}$$

La componente de señal es  $\frac{x_v(t)}{4}$  de potencia  $S_x/16$ . La componente de ruido es  $\frac{n_i(t)}{2}$ . La potencia se encuentra integrando la densidad espectral de potencia de  $n_i(t)$  y dividiéndola entre 4; por lo tanto es  $\eta W/4$ . La relación señal a ruido es

$$SNR_D = \frac{S_x}{4\eta W}$$