Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2017**

Solución Examen – Martes 6 de febrero de 2018

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	**D**	**A**	**A**	**C**

(II) Desarrollo. Total: 70 puntos

Problema 1 (30 puntos)

Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x, y, z) = (f(x^2 + y^2 + z^2)x\,,\ f(x^2 + y^2 + z^2)y\,,\ f(x^2 + y^2 + z^2)z),$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$.

a) (**6 puntos**) $\mathrm{rot}(F) = \big(f'(r^2))2yz - f'(r^2))2yz, f'(r^2))2xz - f'(r^2))2xz, f'(r^2))2xy - f'(r^2))2xy\big) = (0, 0, 0)$. Aquí $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. De manera que F es un campo irrotacional.

b) (**10 puntos**) Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple contenida en S_a. Como el campo F de clase $\mathcal{C}^1$ está definido en todo el espacio podemos usar el Teorema de Stokes para calcular $\int_{\mathcal{C}} F\, dl$. Por lo tanto

$$\int_{\mathcal{C}} F\, dl = \iint_S \mathrm{rot}(F) \cdot dS$$

donde S es una superficie que tiene por borde a la curva $\mathcal{C}$.

Podemos tomar como S a uno de los cascarones de S_a que tiene por borde dicha curva, entonces, por lo probado en la parte anterior

$$\int_{\mathcal{C}} F\, dl = \iint_S \mathrm{rot}(F) \cdot dS = \iint_S 0 \cdot dS = 0.$$

c) (**14 puntos**) Sea $\mathcal{C}_{OA}$ una curva de extremos $O = (0, 0, 0)$ y $A = (0, 0, a)$, con $a > 0$, regular a trozos, recorrida desde O hacia A. Como F es irrotacional y está definido en todo el espacio podemos garantizar que es conservativo, por lo tanto la circulación de F a lo largo de una curva sólo depende de sus extremos. Entonces, en lugar de trabajar sobre la curva $\mathcal{C}_{OA}$ podemos tomar el segmento que une los puntos $O = (0, 0, 0)$ y $A = (0, 0, a)$.
Una parametrización para dicha curva es $\alpha(t) = (0, 0, t)$, $t \in [0, a]$. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}_{OA}} F\, dl = \int_0^a F\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)dt = \int_0^a f(t^2)t dt = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(u)du.$$

Problema 2 (40 puntos)

En este problema se consideran funciones (escalares y vectoriales) de clase C^2, definidas sobre todo $\mathbb{R}^3$

a) (**12 puntos**) Pruebe la identidad vectorial:

$$\nabla^2 F = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(F)) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)).$$

Veamos solamente las primeras componentes de cada término (con esto es suficiente). La primera componente del lado izquierdo es:

$$\left[\nabla^2 F\right]_1 = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Por otra parte la primera componente del lado derecho es:

$$\begin{aligned}
& [\operatorname{grad}(\operatorname{div}(F))]_1 - [\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F))]_1 \\
= \; & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}(F)_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}(F)_2)\right] \\
= \; & \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\right] \\
= \; & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

De (1) y (2) se obtiene la igualdad. Notar que el intercambio en el orden de las derivadas segundas vale porque las funciones son de clase C^2.

b) (**6 puntos**) Se cumple:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) &= \operatorname{rot}\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}, \frac{\partial F_2}{\partial t}, \frac{\partial F_3}{\partial t}\right) \\
\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial t}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial \operatorname{rot}(F)}{\partial t},
\end{aligned}$$

donde de nuevo hemos usado que las funciones son de clase C^2 para poder intercambiar el orden de las derivadas.

c) (**14 puntos**) De todo lo anterior se deduce:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 E &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(E)) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) \\
&= -\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}(H)) = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación de ondas para el campo E.

d) (**8 puntos**) Análogamente,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 H &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(H)) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(H)) \\
&= -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}(E)) = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación de ondas para el campo H.