Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

Examen - 5 de febrero de 2018

Número de examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas.
- El puntaje mínimo de aprobación es 50 puntos.

Ejercicio 1: (20 puntos)

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \end{pmatrix}$ dos matrices 3×3. Asumiendo que $det(A) = 2$, halle $det(B^{-1})$, explicitando las propiedades que utiliza.

b) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha - 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Discuta el rango de A según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución:

a) Usando las propiedades de los determinantes tenemos que $det(B) = 2.(-1).(-1).det(A) = 4$
Finalmente $det(B^{-1}) = 1/det(B) = \frac{1}{4}$.

b) El rango de A vale 3 si $\alpha \neq 2, 4$ y vale 2 si $\alpha = 4$ o $\alpha = 2$.

Ejercicio 2: (15 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta.

a) El plano $\pi)\ x - y + 2z - 2 = 0$ y la recta $r) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 3\lambda \end{cases}$ no se intersectan.

b) Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. El subconjunto de las matrices 2×2 invertibles es un subespacio de V.

c) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces T es un isomorfismo.

Solución:

a) Es verdadera ya que $x - y + 2z = 1 + \lambda + 1 + 6\lambda \neq 2$.

b) Es falsa ya que la matriz nula no es invertible.

c) Es falsa, por ejemplo tomemos $V = W = \mathbb{R}^n$ y la transformación lineal nula ($T(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$) la cual claramente no es un isomorfismo.

Ejercicio 3: (20 puntos)

Considere $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y los subespacios

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x+y=0, \quad z-t=0 \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x-z=0, \quad y=0 \right\}$$

a) Halle $S_1 + S_2$.
b) ¿Es $S_1 + S_2$ una suma directa? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Como $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x+y=0, \quad z-t=0 \right\}$ una base de S_1 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y como $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x-z=0, \quad y=0 \right\}$ una base de S_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un generador de $S_1 + S_2$ y además se chequea fácilmente que este conjunto es linealmnete independiente y por lo tanto es una base de $S_1 + S_2$. Entonces $\dim S_1 + S_2 = 4$ y como $S_1 + S_2 \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se deduce que $S_1 + S_2 = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) La suma de $S_1 + S_2$ es directa pues ya vimos que la unión da las bases de los subespacios es base de la suma.

Ejercicio 4: (25 puntos)

a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{array}{lcl} T(x^3+1) & = & (1,2,0) \\ T(2x^2-1) & = & (1,0,1) \\ T(x+1) & = & (1,0,0) \\ T(x) & = & (2,0,1) \\ T(x^3+x^2) & = & (2,2,1) \end{array}$$

b) Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A}$ es la base $\mathcal{A} = \{x^3 \,, x \,, x^2 - 1 \,, 1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
c) Hallar el núcleo de T. ¿ Es T inyectiva?
d) Hallar la Imagen de T. ¿ Es T sobreyectiva?

Solución:

a) Como $\{x^3+1, x+1, x, x^3+x^2\}$ es base de $\mathbb{R}_3[x]$ sabemos que los valores $T(x^3+1), T(x+1), T(x)$ y $T(x^3+x^2)$ determinan una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ en la cual

$$\begin{array}{lcl} T(x) & = & (2,0,1) \\ T(1) & = & (-1,0,-1) \\ T(x^3) & = & (2,2,1) \\ T(x^2) & = & (0,0,0) \end{array}$$

Por lo tanto $T(2x^2-1) = T(x^2) - T(1) = (1,0,1)$ y entonces efectivamente existe una única transformación lineal.

b) Como $T(x^3) = (2,2,1) = 1.(1,0,0) + 1.(1,1,0) + 1.(0,1,1)$, $coord_{\mathcal{B}}T(x^3) = (1,1,1)$.
Análogamente se calculan las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de los transformados de las otros 3 polinomios de la base $\mathcal{A}$. Entonces:

$$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $T(ax^3+bx^2+cx+d) = a(2,2,1)+b(0,0,0)+c(2,0,1)+d(-1,0,-1) = (2a+2c-d, 2a, a+c-d)$. Entonces $ax^3+bx^2+cx+d \in N(T)$ sii $(2a+2c-d, 2a, a+c-d) = (0,0,0)$ y por lo tanto $N(T) = \{bx^2 : b \in \mathbb{R}\}$ y T no es inyectiva.

d) $Im(T) =< T(1), T(x), T(x^2), T(x^3) >=< (-1,0,-1), (2,0,1), (0,0,0), (2,2,1) >= \mathbb{R}^3$ y por lo tanto T es sobreyectiva.

Ejercicio 5: (20 puntos)

Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

a) Escriba la definición de conjunto linealmente independiente y de transformación lineal inyectiva.

b) Pruebe que si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente en V y T es inyectiva, entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} \subset Im(T)$ es linealmente independiente.

c) Pruebe que si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es generador de V entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es generador de $Im(T)$.

SOLUCIÓN: Ver teórico.