Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2024

Segundo parcial con solución

9 de julio de 2024 | 3

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Respuestas a las preguntas de MÚLTIPLE OPCIÓN									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

Para cada ejercicio, hay una y sólo una opción que es correcta.

La duración del parcial es de 3 horas y media y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicio 1

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2-x+2})$. Indicar el valor de $f'(0)$.

(A) $f'(0) = \cos(e^2)e^2$ (C) $f'(0) = -\operatorname{sen}(e^2)e^2$ (E) $f'(0) = \cos(e^2)$

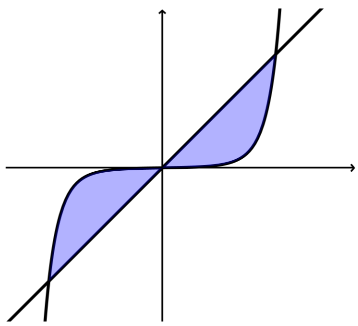
(B) $f'(0) = \operatorname{sen}(e^2)$ (D) $f'(0) = -\cos(e^2)$ (F) $f'(0) = -\cos(e^2)e^2$

Solución:

La derivada de f es $f'(x) = \cos(e^{x^2-x+2})e^{x^2-x+2}(2x-1)$, por lo que $f'(0) = -\cos(e^2)e^2$.

Ejercicio 2

Se considera la región encerrada entre los gráficos de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = xe^{x^2-4}$, que aparece sombreada en la figura.



El área de dicha región es

(A) $2 + 2e^{-4}$ (C) $3 + e^{-4}$ (E) $\frac{1}{2}(3 + e^{-4})$

(B) $4 - 8e^{-4}$ (D) $5 - e^{-4}$ (F) $\frac{1}{2}(5 - e^{-4})$

Solución:

Observemos que $f(x) = g(x)$ si y sólo si x vale -2, 0 o 2. Como f y g son funciones impares, la figura sombreada es centralmente simétrica (es decir, no cambia si le aplicamos la simetría central de centro $(0, 0)$). Por lo tanto, el área de la parte de la figura en que $x \leq 0$, que es

$$\int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))\, dx,$$

es igual al área de la parte de la figura en que $x > 0$. Entonces, el área pedida es

$$2\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = 2\int_0^2 \left(x - xe^{x^2-4}\right)\,dx = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 2xe^{x^2-4}\,dx.$$

El primer sumando es

$$\int_0^2 2x\,dx = x^2\Big|_0^2 = 4.$$

El segundo lo calculamos integrando por sustitución, haciendo el cambio de variable $u = x^2 - 4$. Obtenemos:

$$\int_0^2 2xe^{x^2-4}\,dx = \int_{-4}^0 e^u\,du = e^u\Big|_{-4}^0 = 1 - e^{-4}.$$

Por lo tanto el área pedida es

$$4 - (1 - e^{-4}) = 3 + e^{-4}.$$

Ejercicio 3

Indicar el valor de

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,dx.$$

(A) $2 - \pi$

(B) $-(2 + \pi)$

(C) $-\frac{\pi}{2}$

(D) $-\pi$

(E) 2π

(F) $\pi - 2$

Solución:

Comenzaremos el cálculo de esta integral haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,dx &= \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u)2u\,du.\end{aligned}$$

La integral que nos quedó se puede calcular por partes:

$$\begin{aligned}2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u)u\,du &= 2\left(\operatorname{sen}(u)u\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(u)\,du\right) \\ &= 2\left(\operatorname{sen}(u)u\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos(u)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = -(2+\pi)\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Sea $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f_a(x) = x^3 - ax^2 + 1$.

Indicar para cuál de los siguientes valores del parámetro a la recta tangente a la gráfica de f_a en el punto $(a, f_a(a))$ pasa por el punto $(0, 0)$.

(A) $a = -2$

(B) $a = -3$

(C) $a = 1$

(D) $a = 2$

(E) $a = 3$

(F) $a = -1$

Solución:

Observemos que $f_a(a) = 1$ y que $f'_a(x) = 3x^2 - 2ax$, por lo que $f'_a(a) = a^2$. Entonces, la recta tangente a la gráfica de f_a en el punto $(a, f(a))$ tiene ecuación

$$y = a^2(x - a) + 1.$$

Esta recta pasa por $(0, 0)$ si y sólo si

$$0 = a^2(0 - a) + 1,$$

es decir, si y sólo si $0 = -a^3 + 1$, si y sólo si $a = 1$.

Ejercicio 5

En el conocido videojuego *SlimeCalculus*, una babosa se mueve dentro de un círculo de radio r. La babosa aparece en un punto de la circunferencia y se mueve describiendo un segmento que pasa por el centro del círculo, es decir, que está contenido en un diámetro. En un momento, la babosa gira 90°, y su movimiento describe un segundo segmento perpendicular al primero, hasta que sale del círculo.

Si se desplaza una distancia l_1 antes de girar y una distancia l_2 después de girar, ¿cuál es la longitud máxima que puede recorrer la babosa? Es decir, ¿cuál es el máximo valor posible de $l_1 + l_2$?

(A) $\left(1 + \sqrt{2}\right) r$

(B) $(\frac{1}{2} + \sqrt{3})r$

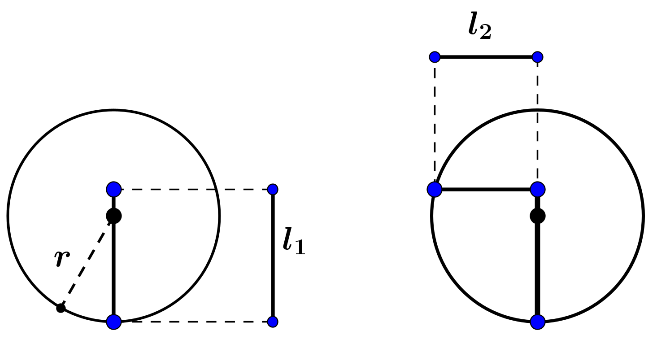
(C) $(1 + \sqrt{5})r$

(D) $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) r$

(E) $3r$

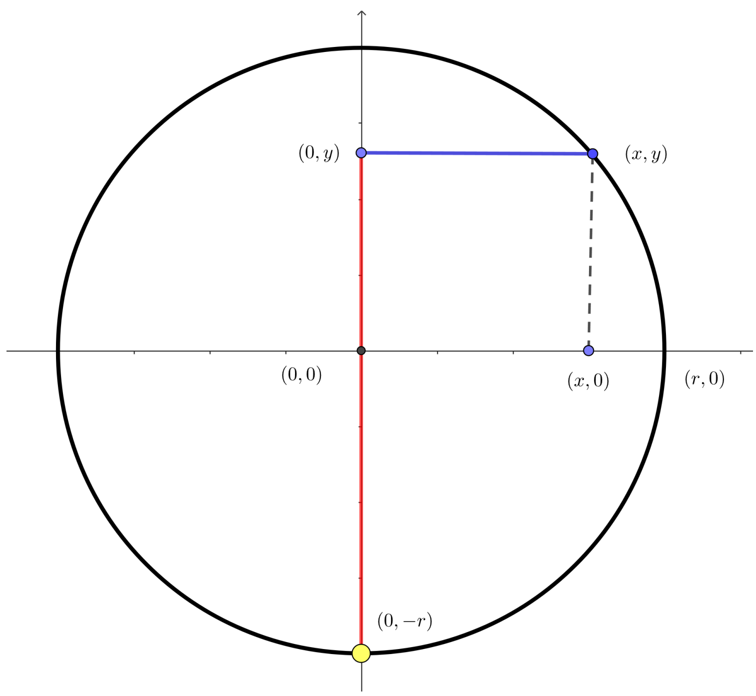
(F) $(1 + \frac{3}{\sqrt{5}})r$

Solución:



Paso 1 Paso 2

Observemos la figura.



La babosa comienza a moverse en el punto amarillo de coordenadas $(0, -r)$ y sube por el segmento rojo hasta $(0, y)$. Hasta aquí, recorrió una distancia l_1, es decir, $l_1 = r + y$. Luego gira 90°. Es irrelevante si gira a la izquierda o hacia la derecha, pues en ambos casos recorrerá la misma longitud. En el dibujo, gira hacia la derecha, recorriendo el segmento azul y llegando al punto (x, y) (con $x > 0$). El segmento azul tiene longitud l_2, es decir, $l_2 = x$. Entonces $l_1 + l_2 = r + y + x$.

Como el punto (x, y) está en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, tenemos que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Por lo tanto, queremos hallar el máximo de la función

$$\begin{array}{rcl} f:[0,r] & \to & \mathbb{R} \\ f(x) & = & r+\sqrt{r^2-x^2}+x \end{array}$$

El máximo se encuentra en $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ y vale $f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=(1+\sqrt{2})r$.

Hay otro planteo posible de dificultad similar. Pensando en el punto (x,y) como $(r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta))$, se escribe l_1+l_2 como una función de θ y se maximiza esta función. El máximo se da en $\theta=\frac{\pi}{4}$ y, por supuesto, tiene el mismo valor.

Ejercicio 6

Consideremos la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\int_0^x (t^2+1)(t+1)(t-2)(t-3)^2\,dt.$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) F tiene exactamente cinco puntos críticos. Tres son máximos relativos y dos son mínimos relativos.

(B) F tiene exactamente cinco puntos críticos. Tres son mínimos relativos y dos son máximos relativos.

(C) F tiene exactamente tres puntos críticos. Dos son máximos relativos y uno es mínimo relativo.

(D) F tiene exactamente tres puntos críticos. Uno es máximo relativo y dos son mínimos relativos.

(E) F tiene exactamente tres puntos críticos. Uno es máximo relativo, uno es mínimo relativo y el otro no es ni máximo ni mínimo.

(F) F tiene exactamente cinco puntos críticos. Uno es máximo relativo, uno es mínimo relativo y hay tres que no son ni máximos ni mínimos.

Se recuerda que x es un *punto crítico* de F si $F'(x)=0$.

Solución:

Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$F'(x) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)^2,$$

que vale 0 en -1, 2 y 3. Por lo tanto, F tiene 3 puntos críticos.

Además,

- $F'(x) > 0$ para $x < -1$,
- $F'(x) < 0$ para $-1 < x < 2$ y
- $F'(x) > 0$ para $x > 2$.

Por lo tanto, F es creciente a la izquierda de -1 y decreciente a la derecha de -1, lo que indica que en -1 hay un máximo relativo. F es decreciente en $(-1, 2)$ y creciente a la derecha de 2, lo que indica que en 2 hay un mínimo relativo. En el punto 3 no hay un extremo, ya que F es estrictamente creciente en $(2, 3)$ y también en $(3, +\infty)$.

Ejercicio 7

Consideremos una función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ que es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$ tal que $f(0) = 3$, $f(2) = 1$. Indicar la afirmación que es necesariamente verdadera:

(A) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = -2$.

(B) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

(C) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = -1$.

(D) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

(E) f es estrictamente decreciente.

(F) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1$.

Solución:

Ver el enunciado del Teorema del valor medio de Lagrange.

Ejercicio 8

Calcular el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2 + x) - x}.$$

(A) 2 (C) 0 (E) 1

(B) $+\infty$ (D) $\frac{1}{2}$ (F) $\frac{3}{2}$

Solución:

Este límite se puede calcular usando polinomios de Taylor. Efectivamente,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2+x)-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2+x)-x}.$$

El polinomio de Taylor de orden 2 en el punto 0 de $e^{x^2}-\cos(x)$ es $\frac{3}{2}x^2$, por lo que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

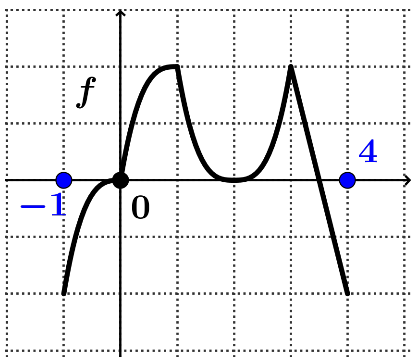
El polinomio de Taylor de orden 2 en el punto 0 de $\operatorname{sen}(x^2+x)-x$ es x^2, por lo que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2+x)-x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2+x)-x}{x^2}} = 1.$$

Entonces, el límite pedido vale $\frac{3}{2}$.

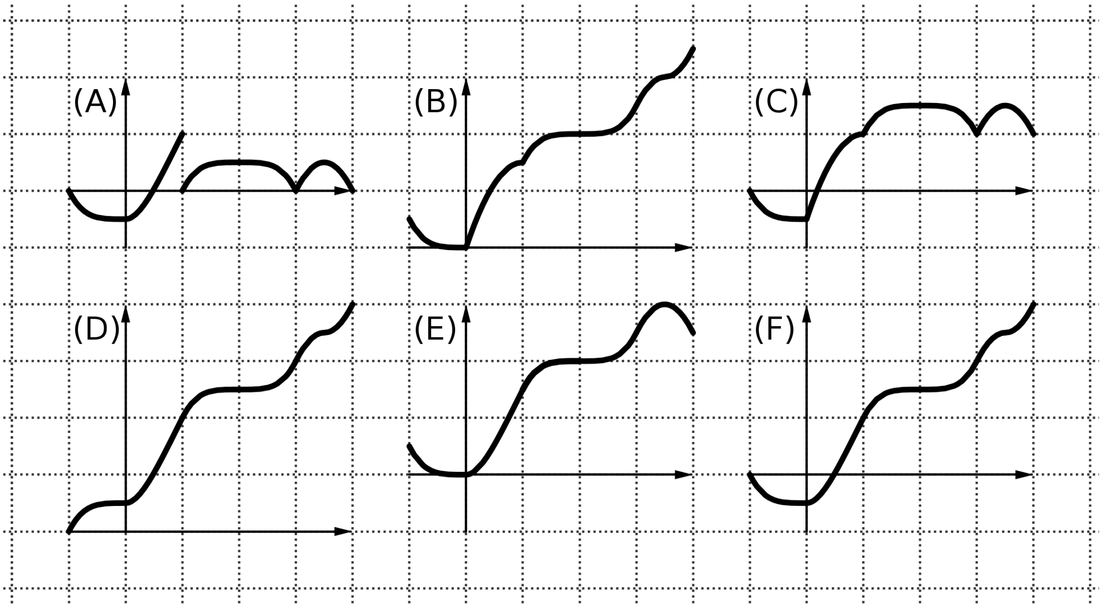
Ejercicio 9

En la imagen se muestra el gráfico de la función $f : [-1,4] \to \mathbb{R}$.



Determinar cuál es el gráfico de la función

$$G(x) = \int_0^x f(t)dt.$$



Solución:

Observemos que:

- Por el Teorema Fundamental del Cálculo, G es derivable (y en particular continua).
- $G(0) = 0$.
- Como $G'(0) = f(0) = 0$, la gráfica de G tiene tangente horizontal en $(0, 0)$.
- Como $G' = f$ es negativa en $(-1, 0)$, G es decreciente en $(-1, 0)$.
- Mirando el signo de $G' = f$, vemos que G es creciente entre 0 y un punto cuyas coordenadas no sabemos exactamente pero que está entre 3 y 4, y luego decrece.

Con estas observaciones alcanza para determinar que la respuesta correcta es E.

Ejercicio 10

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que tiene derivadas de todos los órdenes, de la cual sabemos lo siguiente:

- $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n impar.
- $|f^{(n)}(x)| \leq 2$ para todo $n \geq 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$.

Recordemos que $P_n(f,0)(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto 0.

Queremos hacer un cálculo aproximado de $f(1)$. Indicar el mínimo valor de n para el cual podemos asegurar que

$$|f(1) - P_n(f,0)(1)| < 10^{-2}.$$

(A) 10

(B) 12

(C) 2

(D) 4

(E) 6

(F) 8

Recordar que $f^{(n)}$ designa a la derivada de orden n de f.

Solución:

El primer dato nos dice que $P_n(f,0)(x)$ no tiene términos de grado impar para ningún n. Por lo tanto, si n es impar, $P_n(f,0)(x) = P_{n-1}(f,0)(x)$.

Usando la forma del resto de Lagrange, sabemos que

$$|f(1) - P_n(f,0)(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|$$

para algún $c \in (0,1)$ (que dependerá de n). Usando la cota sobre las derivadas, esto es menor o igual que

$$\frac{2}{(n+1)!}.$$

Con los datos que se dan, no podemos hacer ninguna acotación mejor. Busquemos por lo tanto el mínimo n para el cual $\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$. Es $n = 5$, es decir, $|f(1) - P_5(f,0)(1)| < 10^{-2}$.

Como $P_5(f,0)(x) = P_4(f,0)(x)$, el mínimo valor de n para el cual podemos asegurar que $|f(1) - P_n(f,0)(1)| < 10^{-2}$ es $n = 4$.
