Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2023

Simulacro de segundo parcial

1 de julio de 2023 | 1

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Respuestas al MÚLTIPLE OPCIÓN									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

La duración del parcial es de 3 horas y media y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicio 1

El límite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(1+x)-x}{e^{3x^2}-1}$ es

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) $-1/6$ (D) 1 (E) $-1/2$ (F) $1/4$

Ejercicio 2

Sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y que

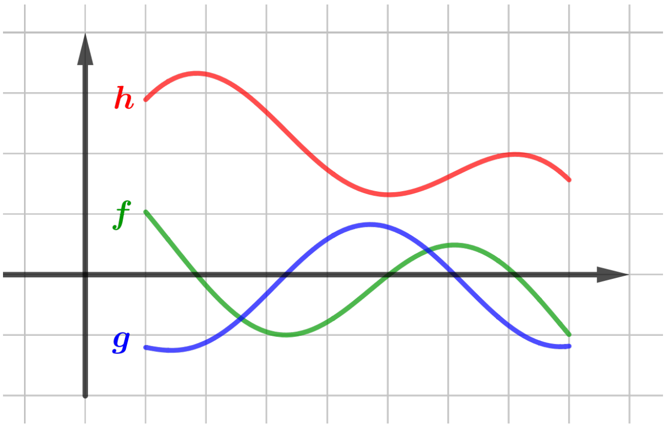
$$\int_1^{e^x+x} f(t)\,dt = \sin(\pi x),$$

indicar cuánto vale $f(1)$.

(A) π (B) $\pi/2$ (C) $-\pi$ (D) $-\pi/2$ (E) 0 (F) 1

Ejercicio 3

Sea $s : I \to \mathbb{R}$ una función con derivadas de todos los órdenes. En el siguiente bosquejo se muestran los gráficos de s, s' y s''



Determinar a qué función corresponde cada gráfico.

(A) $s = f, s' = g, s'' = h$

(B) $s = f, s' = h, s'' = g$

(C) $s = g, s' = f, s'' = h$

(D) $s = g, s' = h, s'' = f$

(E) $s = h, s' = g, s'' = f$

(F) $s = h, s' = f, s'' = g$

Ejercicio 4

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(4x^2+1)(x+1)}\,dx$

(A) $\frac{1}{10}\left(\log\left(\frac{5}{4}\right)+\arctan(2)\right)$

(B) $\frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{5}{4}\right)+\arctan(4)\right)$

(C) $\frac{1}{10}\left(\log\left(\frac{1}{4}\right)+\arctan(4)\right)$

(D) $\frac{1}{10}\left(\log\left(\frac{1}{4}\right)+\arctan(2)\right)$

(E) $\frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1}{4}\right)+\arctan(4)\right)$

(F) $\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{5}{4}\right)+\arctan(2)\right)$

Ejercicio 5

Calcular $\int_1^2 \log^2(x)\,dx$.

(A) $4\log(2)$

(B) $3\log(\frac{4}{3})$

(C) $\log^2(4) - 4$

(D) $2(\log(2) - 1)^2$

(E) $\log^2(2) - 1$

(F) 6

Ejercicio 6

En una carretera que lleva a una ciudad la velocidad máxima permitida no es constante, sino que está determinada punto a punto, es decir, es una función $V(x)$.

En el kilómetro 0 la velocidad máxima permitida es 120 km/h, y en el kilómetro 200, al llegar a la ciudad, la velocidad máxima es 50 km/h (es decir $V(0) = 120, V(200) = 50$). Se sabe además que la función V es derivable y monótona decreciente.

Tres autos, que denotamos A, B, C se mueven por la carretera hacia la ciudad. Denotemos $P_A(t), P_B(t), P_C(t)$ a las posiciones en funcion del tiempo. El tiempo se mide en horas, y las posiciones en kilómetros. Asimismo, denotemos $v_A(t), v_B(t), v_C(t)$ a las velocidades en función del tiempo (medidas en km/h).

Sabemos que mientras todos los coches estan en la carretera se cumple que

- $P_A(0) = P_B(0{,}1) = P_C(0{,}3) = 0$
- La velocidad de A y B siempre es la maxima perimtida en ese punto de la carretera.
- La distancia entre B y C es constante.

Determinar la afirmación correcta para todo t mientras todos esten en la carretera.

(A) $P_A(t) = P_B(t + 0{,}1)$, $P_B(t) = P_C(t + 0{,}2)$

(B) $v_A(t) = v_B(t + 0{,}1)$, $v_B(t) = v_C(t)$

(C) $v_A(t) = v_B(t) = v_C(t)$

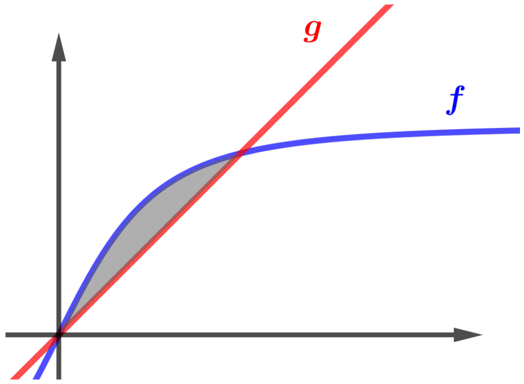
(D) $v_A(t) = v_B(t + 0{,}1)$, $v_B(t) = v_C(t + 0{,}2)$

(E) Todos los autos tardan lo mismo en llegar desde el kilómetro 0 a la ciudad.

(F) $P_A(t) - P_C(t) = 2(P_A(t) - P_B(t))$

Ejercicio 7

En la figura se muestran los gráficos de las funciones $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{3x^2+9}}$ y $g(x) = x$.

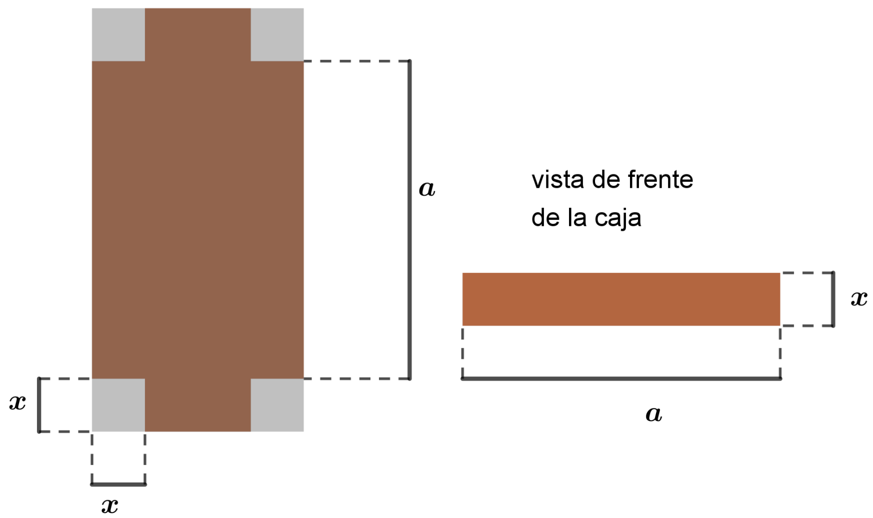


Calcular el área de la región sombreada.

(A) 15/2 (B) 6 (C) 12 (D) 3 (E) 3/2 (F) 1/2

Ejercicio 8

Una caja abierta es construida con un rectángulo de cartón de dimensiones 100cm por 200 cm quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba. Hallar el mayor volumen posible para una caja constuirda de esta forma (en m^3).



(A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(B) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(C) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

(D) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$

(E) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(F) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ejercicio 9

Sea $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ una función continua que es derivable en $(1,5)$. Si $f(1)=-3$ y $9\le f'(x)\le 10$ para todo $x\in(1,5)$, ¿qué podemos afirmar de $f(5)$?

(A) $f(5)<10$

(B) $f(5)\in[10,20)$

(C) $f(5)\in[20,30)$

(D) $f(5)\in[30,40)$

(E) $f(5)\in[40,50)$

(F) $f(5>50)$

Ejercicio 10

Consideremos el siguiente **Teorema**:

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que es $n+1$ veces derivable en $\mathbb{R}$ con $f^{(n+1)}$ continua. Si $x\in\mathbb{R}$, entonces

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_nf(x),$$

donde

$$R_nf(x)=\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Para f en las hipótesis del teorema, ¿cuál de las siguientes afirmaciones se puede deducir de él?

(A) f es creciente.

(B) $f(0)=0$.

(C) f es una función polinómica.

(D) $f(1)\le\int_0^1\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n\,dt$.

(E) $|f(1)-f(0)|\le\int_0^1\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n\,dt$.

(F) $f(1)-f(0)-f'(0)-\frac{f''(0)}{2!}-\cdots-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\int_0^1\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n\,dt$.