Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2023

Segundo parcial

1 de julio de 2023 | 1

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Respuestas al MÚLTIPLE OPCIÓN									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
C	B	F	E	E	A	F	B	B	E

Llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

La duración del parcial es de 3 horas y media y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{x^2-2}(\sin(\pi x) + 3).$$

¿Cuánto vale $f'(2)$?

(A) $e^2(3-\pi)$ (C) $e^2(12+\pi)$ (E) $e^4(\pi-1)$

(B) $2e^2 - \frac{\pi}{3}$ (D) $e^{-2}(4+\pi)$ (F) $e^2(\pi^2+1)$

Solución:

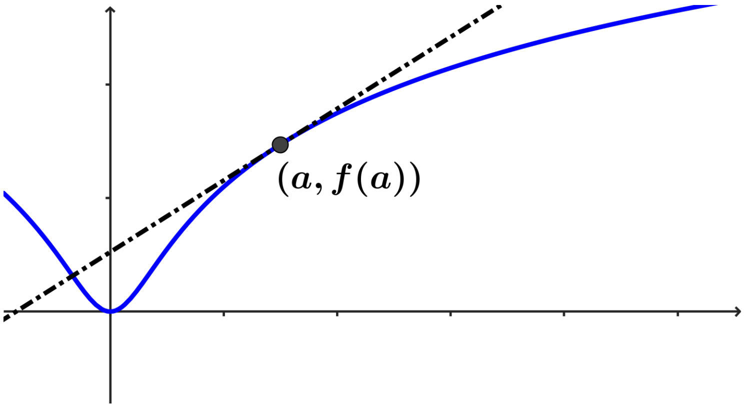
Si $f(x) = e^{x^2-2}(\sin(\pi x) + 3)$, aplicando la fórmula de la derivada del producto y la regla de la cadena tenemos que

$$f'(x) = e^{x^2-2}2x(\sin(\pi x) + 3) + e^{x^2-2}\cos(\pi x)\pi = e^{x^2-2}(2x(\sin(\pi x) + 3) + \pi\cos(\pi x)).$$

Entonces $f'(2) = e^2(12+\pi)$.

Ejercicio 2

En la imagen se muestra el bosquejo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Además se muestran el punto $(a, f(a))$ y la recta tangente a f por a de forma punteada.



Inidcar la afirmacion correcta.

(A) $f'(a) > 0, f''(a) > 0$ (C) $f'(a) < 0, f''(a) > 0$ (E) $f'(a) = 0, f''(a) > 0$

(B) $f'(a) > 0, f''(a) < 0$ (D) $f'(a) < 0, f''(a) < 0$ (F) $f'(a) = 0, f''(a) < 0$

Solución:

La recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ tiene pendiente positiva, por lo que $f'(a) > 0$. La concavidad en ese punto es negativa, por lo que $f''(a) < 0$.

Ejercicio 3

Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(3x)\,dx$.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$ (F) $-\frac{1}{2}$

Solución:

Hallaremos una primitiva de $\sin(x)\cos(3x)$ y luego usaremos la regla de Barrow para calcular la integral pedida. Integrando por partes (primitivizando $\sin(x)$ y derivando $\cos(3x)$) tenemos que

$$\int \sin(x)\cos(3x)\,dx = -\cos(x)\cos(3x) - 3\int \cos(x)\sin(3x)\,dx.$$

Integrando $\int \cos(x)\sin(3x)\,dx$ por partes (primitivizando $\cos(x)$ y derivando $\sin(3x)$) tenemos que

$$\int \cos(x)\sin(3x)\,dx = \sin(x)\sin(3x) - 3\int \sin(x)\cos(3x)\,dx.$$

Por lo tanto

$$\int \sin(x)\cos(3x)\,dx = -\cos(x)\cos(3x) - 3\sin(x)\sin(3x) + 9\int \sin(x)\cos(3x)\,dx.$$

Aquí podemos despejar la primitiva que necesitamos:

$$\int \sin(x)\cos(3x)\,dx = \frac{1}{8}(\cos(x)\cos(3x) + 3\sin(x)\sin(3x)).$$

Observemos que no hemos puesto una constante aditiva en este cálculo porque nos basta con hallar *una* primitiva de $\sin(x)\cos(3x)$.

Finalmente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(3x)\,dx = \left[\frac{1}{8}(\cos(x)\cos(3x) + 3\sin(x)\sin(3x))\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 4

Calcular $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{e^x+2}dx$

(A) $\log\left(\frac{e^3+2}{e+2}\right)$

(B) $\arctan(3) - \arctan(1)$

(C) $\arctan(e^3) - \arctan(e)$

(D) $1 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^3+2}{e+2}\right)$

(E) $1 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^3+2}{e+2}\right)$

(F) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{9}{5}\right)$

<u>Solución:</u>

Para calcular $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{e^x+2}\,dx$, haremos el cambio de variable $u = e^x$. Como $du = e^x dx$, $dx = e^{-x}du = \frac{du}{u}$. Cuando $x = 1$, $u = e$ y cuando $x = 3$, $u = e^3$, por lo que

$$\int_1^3 \frac{1}{e^x+2}\,dx = \int_e^{e^3} \frac{du}{(u+2)u}.$$

Calcularemos esta última integral por el método de fracciones simples. Escribimos

$$\frac{1}{(u+2)u} = \frac{-1/2}{u+2} + \frac{1/2}{u}$$

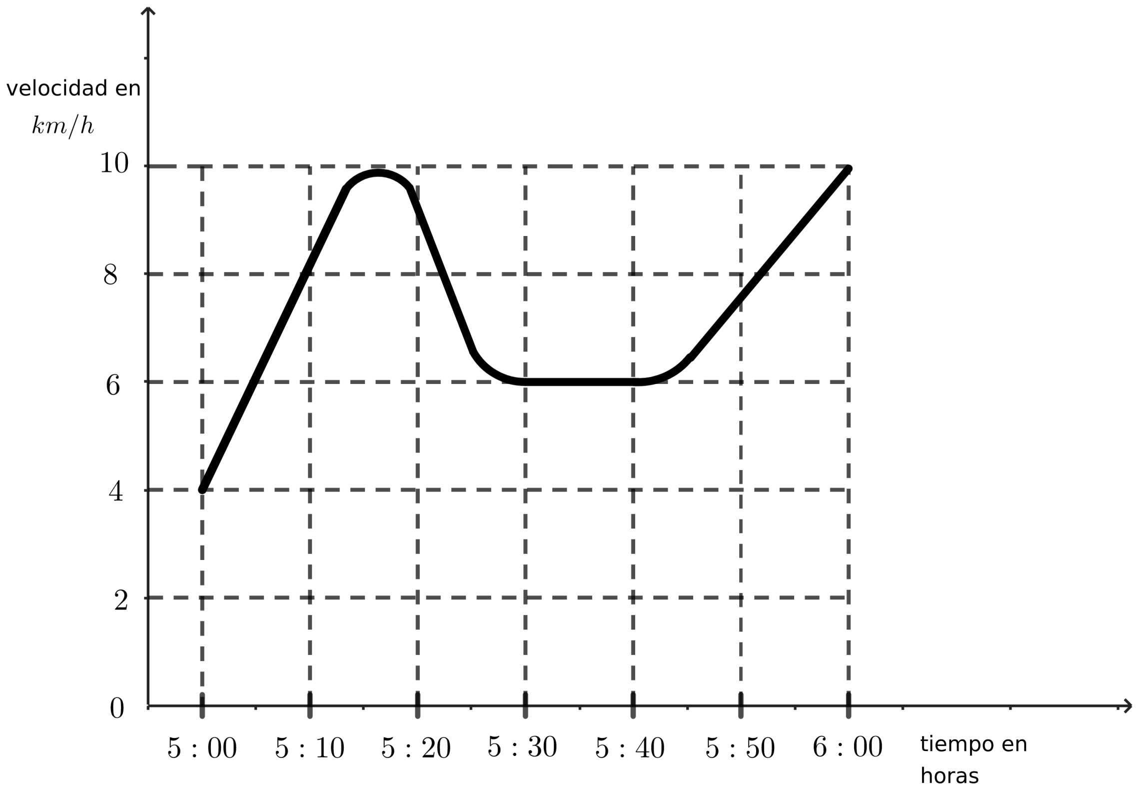
por lo que una primitiva de de $\dfrac{1}{(u+2)u}$ donde $u > 0$ es $-\dfrac{1}{2}(\log(u+2) - \log(u))$.

Finalmente, usando la regla de Barrow,

$$\int_e^{e^3} \frac{du}{(u+2)u} = -\frac{1}{2}(\log(u+2) - \log(u))\Big|_e^{e^3} =$$
$$-\frac{1}{2}(\log(e^3+2) - 3 - \log(e+2) + 1) = 1 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^3+2}{e+2}\right).$$

Ejercicio 5

Ayer Fabiana fue a trotar por la rambla a las 5 de la tarde. La gráfica muestra su velocidad (medida en km/h) como función del tiempo entre las 5 y las 6. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.



(A) En total, Fabiana recorrió más de $9km$.

(B) Hubo un momento entre 5:10 y 5:20 en que Fabiana se detuvo y cambió de dirección.

(C) La aceleración de Fabiana fue mayor a las 5:25 que a las 5:50.

(D) Entre 5:30 y 5:40, Fabiana recorrió exactamente 600m.

(E) Entre las 5 y las 6, Fabiana siempre corrió en la misma dirección. Es decir, nunca retrocedió.

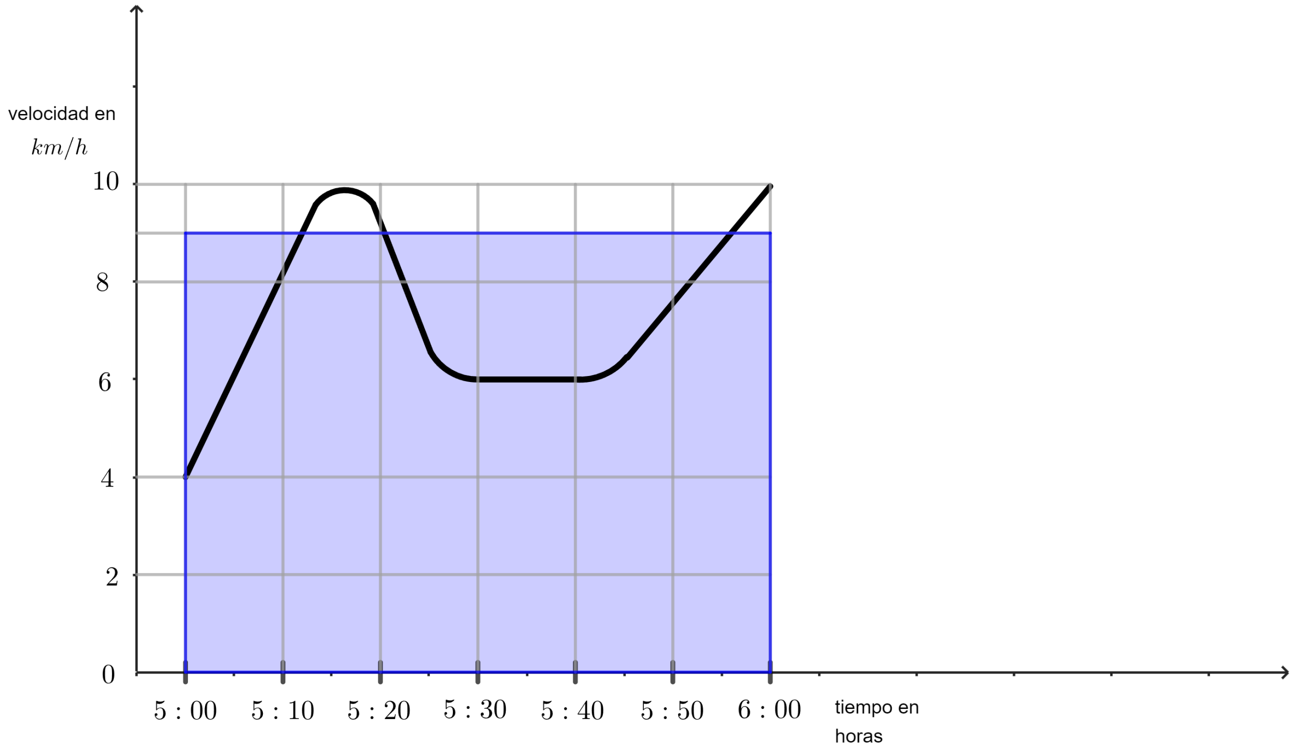
(F) En total, Fabiana recorrió menos de 6 km.

Solución:

Analicemos cada una de las afirmaciones propuestas.

(A) En total, Fabiana recorrió más de $9km$.

La distancia total recorrida por Fabiana es el área bajo el gráfico de la velocidad. Usando la cuadrícula es posible estimar esta área, teniendo en cuenta que 10 minutos son 1/6 de hora, y ver que Fabiana recorrió menos de $9km$. Otra manera de pensarlo es la siguiente: si hubiera trotado a una velocidad constante de $9km/h$, habría recorrido exactamente $9km$. Eso corresponde al área celeste en la siguiente figura:



Claramente el área celeste es mayor que el área bajo el gráfico de la velocidad, por lo que Fabiana recorrió menos de $9km$ y esta opción es falsa.

(B) Hubo un momento entre 5:10 y 5:20 en que Fabiana se detuvo y cambió de dirección.

Hay un momento entre 5:10 y 5:20 en que la velocidad es máxima, y en todo el intervalo la velocidad es positiva. Si Fabianan se hubiera detenido, eso correspondería a tener velocidad 0. Por lo tanto, esta opción es falsa.

(C) La aceleración de Fabiana fue mayor a las 5:25 que a las 5:50.

A las 5:25 la aceleración es negativa, y a las 5:50 es positiva. Por lo tanto esta opción es falsa.

(D) Entre 5:30 y 5:40, Fabiana recorrió exactamente 600m.

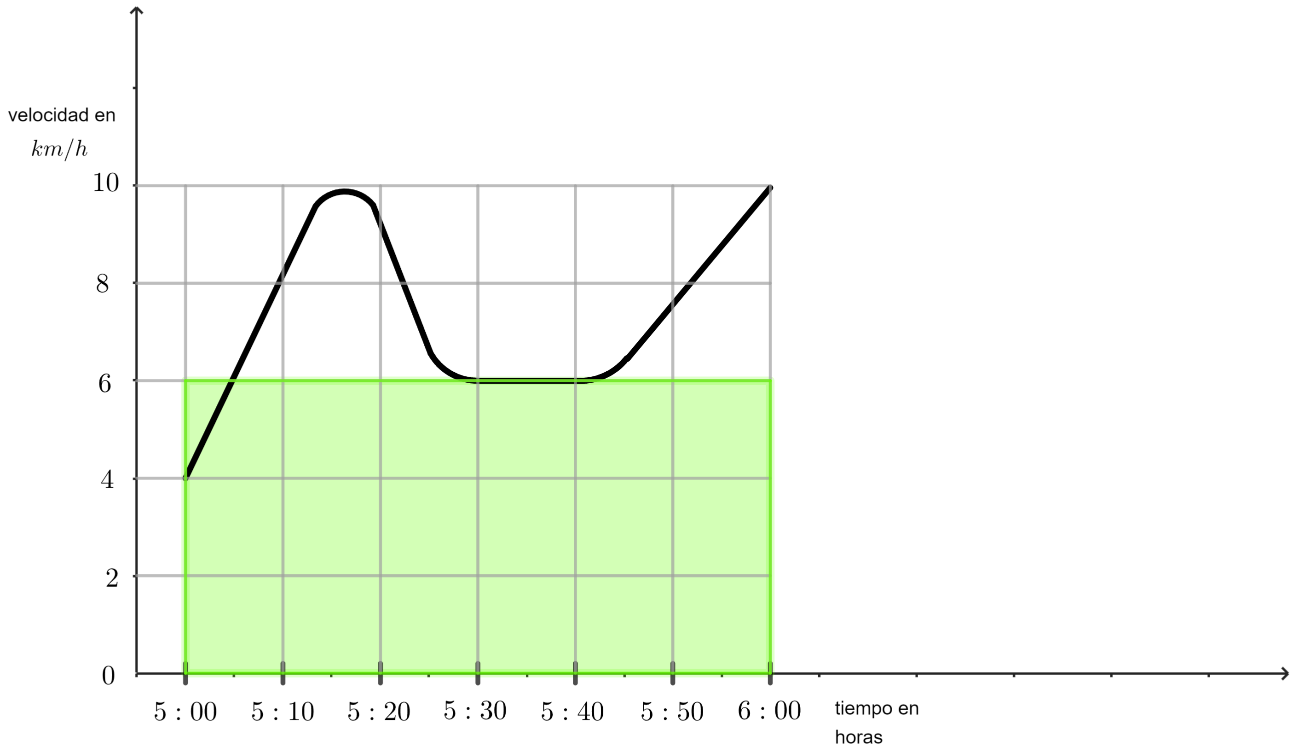
Entre 5:30 y 5:40, la velocidad es constante e igual a $6km/h$. Como se trata de un lapso de 10 minutos, es decir, 1/6 de hora, la distancia recorrida es $(6km/h) \times \left(\frac{1}{6}h\right) = 1km$. Por lo tanto esta opción es falsa.

(E) Entre las 5 y las 6, Fabiana siempre corrió en la misma dirección. Es decir, nunca retrocedió.

La velocidad siempre es positiva, lo cual indica que Fabiana siempre avanzó, nunca retrocedió. Por lo tanto esta opción es verdadera.

(F) En total, Fabiana recorrió menos de 6 km.

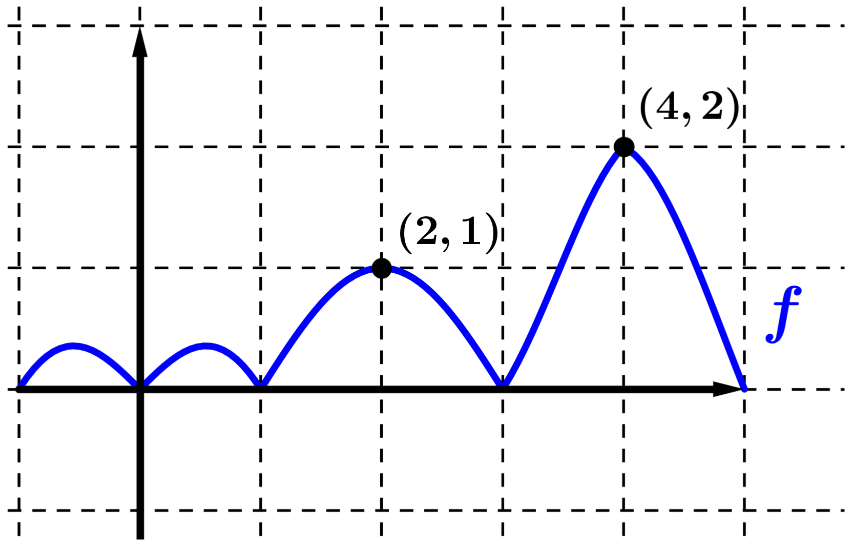
La distancia total recorrida por Fabiana es el área bajo el gráfico de la velocidad. Usando la cuadrícula es posible estimar esta área, teniendo en cuenta que 10 minutos son 1/6 de hora, y ver que Fabiana recorrió más de $6km$. Otra manera de pensarlo es la siguiente: si hubiera trotado a una velocidad constante de $6km/h$, habría recorrido exactamente $6km$. Eso corresponde al área verde en la siguiente figura:



Claramente el área verde es menor que el área bajo el gráfico de la velocidad, por lo que Fabiana recorrió más de $6km$ y esta opción es falsa.

Ejercicio 6

En la imagen se muestra el bosquejo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.



Se define la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $G(x) = \displaystyle\int_4^{x^2} f(t)\,dt$

Inidcar cual de las siguientes es la ecuación de la recta tangente al gráfico de G en el punto $(2, G(2))$.

(A) $r(x) = 8x - 16$ (C) $r(x) = 4x - 8$ (E) $r(x) = x - 2$

(B) $r(x) = 8x$ (D) $r(x) = 4x$ (F) $r(x) = x$

Solución:

Estamos buscando la recta con pendiente $G'(2)$ que pasa por el punto $(2, G(2))$.

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena calculamos la derivada de G:

$G'(x) = f(x^2)2x$. Entonces $G'(2) = 4f(4) = 8$.

Por otro lado, $G(2) = 0$. La recta de pendiente 8 que pasa por el punto $(2, 0)$ es la de ecuación $y = 8x - 16$.

Ejercicio 7

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable, tal que su polinomio de Taylor en 0 de orden 2 es $P(x) = 2x + 3x^2$.

El valor del límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{(f(x))^2}{\sin(x^2)}$ es

(A) 0 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) 2 (E) 3 (F) 4

Solución:

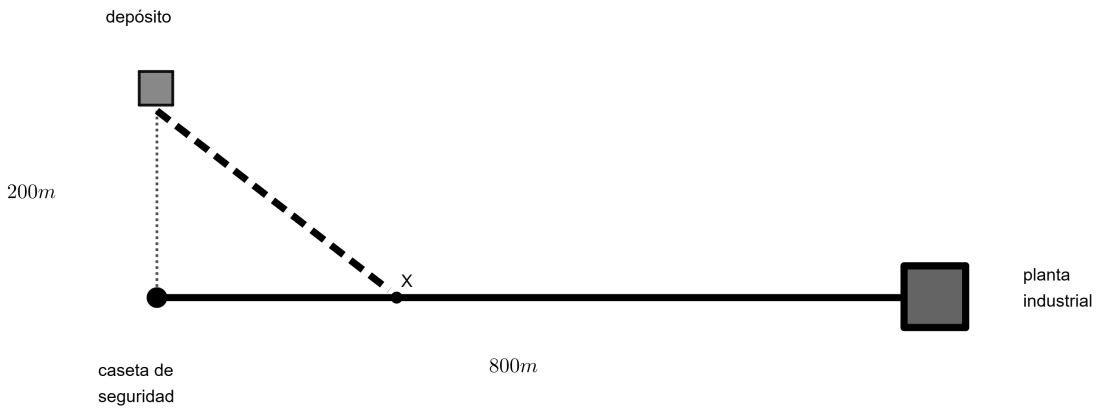
En el límite, podemos sustituir la función $(f(x))^2$ y la función $\sin(x^2)$ por sus polinomios de Taylor de orden dos. El de $(f(x))^2$ se obtiene haciendo $(P(x))^2$ y tomando sólo los términos de grado menor o igual que dos. Es decir, tomamos $(P(x))^2 = (2x + 3x^2)^2 = 4x^2 + 12x^3 + 9x^4$, y el polinomio de orden 2 de $(f(x))^2$ será simplemente $4x^2$.

Si no recordáramos cómo calcular el polinomio de Taylor de un producto de funciones, podríamos simplemente usar que $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ y $f''(0) = 6$ (lo cual sabemos pues conocemos el polinomio de Taylor de f) para calcular las derivadas en 0 hasta orden 2 de $g(x) = (f(x))^2$. Concretamente: $g(0) = f(0)^2 = 0$, $g'(0) = 2f(0)f'(0) = 0$, $g''(0) = 2(f'(0)^2 + f(0)f''(0)) = 8$.

El polinomio de Taylor de $\sin(x^2)$ se obtiene sustituyendo x por x^2 en el polinomio de Taylor de $\sin(x)$. Como el polinomio de Taylor de orden 1 de $\sin(x)$ es x, el polinomio de Taylor de orden 2 de $\sin(x^2)$ es x^2.

Por lo tanto
$\lim_{x\to 0} \dfrac{(f(x))^2}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{x^2} = 4.$

Ejercicio 8



La empresa VIDC S.A. tiene sus instalaciones en un predio rural en Cerro Largo. Dentro de éste, la planta industrial se encuentra al final de un camino de tierra, a $800m$ de la caseta de seguridad, como se muestra en la figura. A $200m$ de este camino, justo frente a la caseta de seguridad se ha construido un nuevo depósito. Los camiones que llevan la producción de la planta al depósito deben circular, debido a su peso, por camino asfaltado. Por este motivo se va a asfaltar el camino de tierra desde la planta hasta el punto X, y de ahí se va a construir un camino asfaltado que va directo al depósito. Construir un tramo del nuevo camino cuesta el triple que asfaltar un tramo del camino existente de igual longitud. ¿A qué distancia debe estar X de la planta, si se quiere minimizar el costo de la obra?

(A) $50\sqrt{2}m$ (C) $400m$ (E) $800 - 300\sqrt{2}m$

(B) $800 - 50\sqrt{2}m$ (D) $300\sqrt{2}m$ (F) $626m$

<u>Solución:</u>

Llamemos x a la distancia de la caseta de seguridad al punto X. Lo que el problema nos pide es que calculemos $800 - x$. La longitud del camino punteado (esto es, el que hay que construir) es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{200^2 + x^2}$. La longitud que hay que asfaltar es $800 - x$. Como el costo del camino nuevo, por unidad de longitud, es el triple que el de asfaltar el camino existente, tenemos que minimizar la función

$$f : [0, 800] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3\sqrt{200^2 + x^2} + (800 - x).$$

En efecto, si $\alpha > 0$ es el precio por asfaltar un metro del camino de tierra, hacer un metro de camino nuevo cuesta 3α. El costo de la obra es $3\alpha\sqrt{200^2 + x^2} + \alpha(800 - x) = \alpha f(x)$. No conocemos el valor de α, pero el valor de x que minimiza el costo es el mismo que el que minimiza f.

La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{200^2 + x^2}} - 1$, que se anula cuando $3x = \sqrt{200^2 + x^2}$, es decir, cuando $9x^2 = 200^2 + x^2$ y $x \geq 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos que $x = 50\sqrt{2}$. Para verificar que en este punto efectivamente hay un mínimo de f, podemos estudiar el signo de f' o calcular $f''(50\sqrt{2})$. Sin embargo, como este es un ejercicio de múltiple opción, esta verificación no es necesaria a los efectos de determinar cuál es la respuesta correcta.

Si el valor de x que minimiza el costo es $50\sqrt{2}$, la distancia de la planta a X que minimiza el costo es $800 - 50\sqrt{2}$.

Ejercicio 9

¿Cuál es la segunda cifra después de la coma del número $\sin(1/3)$?

(A) 1 (B) 2 (C) 8 (D) 5 (E) 7 (F) 9

<u>Solución:</u>

Aproximaremos $\sin(1/3)$ usando el polinomio de Taylor de $f(x) = \sin(x)$, que es
$P_{2n+1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Al aproximar $\sin(1/3)$ por $P_{2n+1}(1/3)$, el error cometido es $|f(1/3) - P_{2n+1}(1/3)| = |R_{2n+1}(1/3)|$.
Usando la forma del resto de Lagrange,
$|R_{2n+1}(1/3)| = \left| \dfrac{f^{2n+2}(t)}{(2n+2)!} \dfrac{1}{3^{2n+2}} \right|$,
para algún $t \in [0, 1/3]$.
Como las derivadas de orden par de f son siempre la función seno o su opuesta, $|f^{2n+2}(t)| \leq 1$, sin importar cuáles sean n y t. Entonces el error cometido es menor o igual a $\dfrac{1}{(2n+2)!\,3^{2n+2}}$. Para $n = 0$ esto es $\frac{1}{18}$, lo cual no es suficiente para asegurar que la aproximación calcula correctamente la segunda cifra decimal, pero para $n = 1$ esta cota del error es $\dfrac{1}{4!3^4} = \dfrac{1}{1944} < \dfrac{1}{1000}$.
Entonces tomamos el polinomio de Taylor de orden 4 y lo evaluamos en $x = 1/3$ para obtener una aproximación de $\sin(1/3)$ con un error menor a un milésimo.
$P_4(1/3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!3^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{162} = \frac{53}{162}$,
que es aproximadamente igual a 0,327. El error es suficientemente pequeño para que podamos afirmar que la segunda cifra decimal de $\sin(1/3)$ es 2.

Ejercicio 10

Consideremos el siguiente **Teorema**:

Si $a < b$ son números reales f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Para dos funciones f y g como en las hipótesis del teorema, ¿cuál de las siguientes afirmaciones se puede deducir de él?

(A) $(f(b) - f(a))g'(a) = (g(b) - g(a))f'(b)$.

(B) Si $f(b) = f(a)$, entonces $g(b) = g(a)$.

(C) Si f es estrictamente creciente en $[a, b]$, g también.

(D) Si existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = 0$, entonces $g'(d) = 0$.

(E) Si $g' > 0$ en (a, b), entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

(F) Si f y g son estrictamente crecientes en $[a, b]$, entonces $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} > 1$.

Solución:

Veamos que la respuesta E es correcta.

Si $g' > 0$ en (a, b), esto quiere decir que g es estrictamente creciente, por lo que $g(b) > g(a)$ y $g(b) - g(a) \neq 0$. Por otro lado $g' \neq 0$ siempre. Tomando como d el punto c que nos da el teorema, como

$$(f(b) - f(a))g'(d) = (g(b) - g(a))f'(d)$$

concluimos que $\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, correctamente pues en ningún caso estamos dividiendo por cero.

(El objetivo de este ejercicio, que puede no ser evidente a simple vista, es evaluar la habilidad de leer matemática – ¡que es distinta de la habilidad de leer otro tipo de textos! En el curso al que este parcial corresponde, el teorema que aparece en este ejercicio no fue enseñado. El ejercicio consiste en leer un enunciado *nuevo* y hacer una pequeña inferencia a partir de él.)
