Simulacro segundo parcial

Duración: 3 horas
Deben justificar todas sus respuestas

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Sea $f : [\pi/2, 3\pi/2] \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \sin(x)$.

1. Probar que f es invertible.
2. Estudiar continuidad de f^{-1}.
3. Estudiar la derivabilidad de f^{-1} y donde corresponda calcular su derivada.

Ejercicio 2.

1. Probar que
$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx.$$
2. Probar que $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es primitivizable y hallar una primitiva F. ¿Cómo son el resto de las primitivas?
3. Calcular
$$\int_{0}^{1} x\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$.

1. Hallar las raíces y el signo de f.
2. Probar que f es derivable y hallar su derivada.
3. Hacer un bosquejo aproximado de f.
4. ¿f tiene mínimo absoluto?

Esquema de solución

Ejercicio 1

1. Observar que $f(\pi/2) = 1$, $f(3\pi/2) = -1$. Como f es continua, monótona y el dominio es un intervalo entonces $f([\pi/2, 3\pi/2])$ es el intervalo $[-1, 1]$. Esto implica que f es sobreyectiva. Por otro lado, $f'(x) = \cos(x)$ y en $(\pi/2, 3\pi/2)$ es negativa, por lo que f es decreciente, esto implica que f es inyectiva en $[\pi/2, 3\pi/2]$. Por tanto existe $f^-1 : [-1, 1] \to [\pi/2, 3\pi/2]$ inversa de f.

2. Como f está definida en un intervalo, es biyectiva y monótona, se tiene que f^{-1} es continua (resultado demostrado en calse).

3. Para $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$ se cumple $f'(x) \neq 0$, entonces $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(x)}$, con $y = \sin(x)$. Esto es así por un teorema de la derivada de la función inversa. Observar que el resultado no está dado en función de la variable y. Esto es un inconveniente que en este caso se resuelve de la siguiente forma: Sabemos que $|\cos(x)| = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$. Como en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$ el signo de $\cos(x)$ es negativo, entonces tenemos que $\cos(x) = -\sqrt{1-y^2}$. Finalmente $(f^{-1})'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Observar que el signo de esta derivada es coherente con el tipo de monotonía de (f^{-1}) que es la misma que la de f.

Ejercicio 2.

1. Vamos a aplicar aditividad en el intervalo $[-2, 2]$. Entonces

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx + \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$

   Trabajemos con el primer término del segundo miembro:
   Vamos a realizar el siguiente cambio de variable: $u = -x$, por lo que $du = -dx$. Ahora ajustamos los límites de integración, $x = -2$ entonces $u = 2$, $x = 0$, entonces $u = 0$. Obtenemos así que

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx = -\int_{2}^{0} \sqrt{4-u^2}\, du = \int_{0}^{2} \sqrt{4-u^2}\, du$$

   Esto prueba el resultado.
   Otra forma más simple para obtener el resultado se basa en que f es una función par.

2. La función f es continua en $[-2, 2]$, por tanto por el TFC tiene primitiva. Para encontrar una primitiva consideramos el cambio de variable $x = 2\cos(u)$, entonces $dx = -2\sin(u)\, du$. Aquí tenemos que elegir correctamente los límites de integración: si $x = 0$, entonces podemos considerar $u = \pi/2$, si $x = 2$ podemos considerar $u = 0$. Con esto obtenemos que

$$\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2} = \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{4-4\cos^2(u)}(-2\sin(u))\, du = 2\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2(u)}\sin(u)\, du$$

   Recordando que $1-\cos^2(u) = \sin^2(u)$ y sabiendo que el signo de la función $\sin(u)$ es positivo en el intervalo $(0, \pi/2)$, obtenemos que la integral que stamos calculando es igual a $\int_0^{\pi/2} \sin^2(u)\, du$. Esta última integral fue calculada en el práctico y sale aplicando partes.

3. Vamos a considerar el cambio de variable $u = 4 - x^2$, entonces $du = -2x\, dx$. Entonces la integral nos queda

$$\frac{-1}{2}\int_{4}^{3} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int_{3}^{4} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{3/2}\,|_3^4$$

Ejercicio 3.

1. Notar que $e^{t^2} > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por tanto el signo de f depende del signo de $x^2 - x$. Las raices son $x = 0$ y $x = 1$. $x^2 - x > 0$ si $x > 1$ o $x < 0$ y $x^2 - x < 0$ si $x \in (0,1)$.

2. La función f es derivable pues la función integrando es continua en $\mathbb{R}$ y las funciones en los extremos de integración son derivables en $\mathbb{R}$. Aplicando el TFC y la regla de la cadena se tiene que $f'(x) = e^{x^4} 2x - e^{x^2}$.

3. **Lo siguiente es una manera de resolver el problema pero puede haber otras válidas.** Observar que $f'(x) = e^{x^4} 2x - e^{x^2} = e^{x^2}(e^{(x^4-x^2)} 2x - 1)$. Notar que el signo de f' depende del signo de $e^{(x^4-x^2)} 2x - 1$. Analizamos h definida en $\mathbb{R}$ tal que $h(x) = e^{(x^4-x^2)} 2x - 1$. Calculando h' obtenemos que $h'(x) = e^{(x^4-x^2)}(8x^4 - 4x^2 + 2)$, al estudiar su signo vemos que $h'(x)$ es positiva en $\mathbb{R}$. Por tanto h es creciente. Además como $h(0) < 0$ y $h(1) > 0$, por Bolzano y al ser h creciente, existe un único $c \in (0,1)$ tal que $h(c) = 0$. En resumen, si $x < c$ entonces $h(x) < 0$, si $x > c$, entonces $h(x) > 0$. Volviendo a f, esto implica que f es decreciente en $(-\infty, c)$ y f es creciente en $(c, +\infty)$. Esto implica que en c se alcanza el mínimo absoluto de f. **Observar que el gráfico de la función mostrado en la figura debería pasar por el origen, es un error del dibujo**

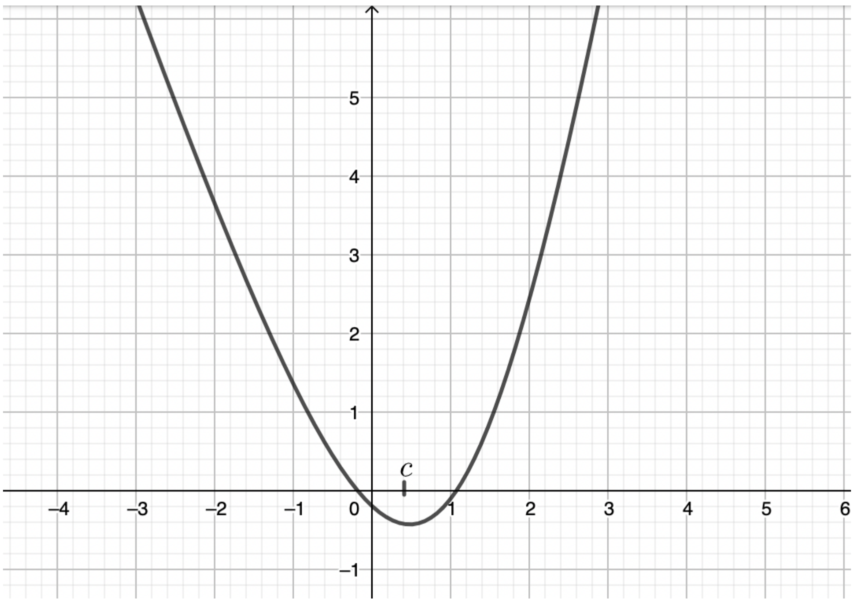

Figura 1: Bosquejo de f.