Cálculo diferencial e integral en una variable **2do semestre de 2020**

Segundo parcial – Versión 1 7 de diciembre de 2020

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Notación:

En los siguientes ejercicios, se escribe $P_n(f,a)$ al polinomio de Taylor de orden n (cuando existe) de la función f en el punto a.

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 12 puntos)

Correctos: 2 puntos. Incorrectos: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables en $\mathbb{R}$. Se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo punto $a \in \mathbb{R}$, tenemos que $P_n(h,a) = P_n(f,a) + P_n(g,a)$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable en $\mathbb{R}$. Entonces, para todos puntos $a, x \in \mathbb{R}$ tales que $x > a$, existe un punto $c_x \in [a,x]$ tal que:

$$f(x) - P_n(f,a)(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $\mathbb{R}$, entonces f tiene un extremo local en un punto $c \in \mathbb{R}$ si y sólo si $f'(c) = 0$.

4. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$, entonces es continua en $\mathbb{R}$.

5. Dadas funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

Entonces la función h es derivable en $\mathbb{R}$, y para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $h'(x) = f(g(x))$.

6. Para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \log(1+x^2)$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 48 puntos)

Correctos: 8 puntos. Incorrectos: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

En caso de tener al menos 4 ejercicios Verdadero/Falso correctos y algún ejercicio Múltiple Opción incorrecto, el primer ejercicio Múltiple Opción incorrecto pasará a restar 0 puntos.

1. La igualdad $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\log(\sin(x)+1)-(x+ax^2+bx^3)}{x^3}\right)=0$
se cumple para los siguientes valores de $a, b \in \mathbb{R}$:

(A) $a=0,\ b=0$
(B) $a=0,\ b=-\frac{1}{6}$
(C) $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{6}$
(D) $a=-1,\ b=1$
(E) $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}$

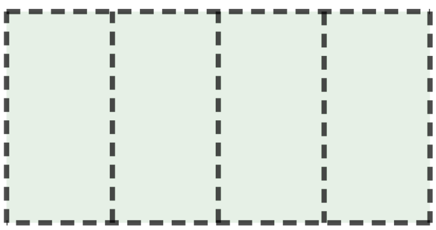
2. La integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)\,dx$ vale:

(A) $\pi-2$
(B) $\pi+2$
(C) 2
(D) $2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$
(E) $\frac{\pi}{2}+1$

3. La integral $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{e^t-e^{-t}}$ vale:

(A) $\log\left(\frac{e^3-e^{-3}}{e^2-e^{-2}}\right)$
(B) $\log\left(\frac{(e^3)^2-1}{(e^2)^2-1}\right)$
(C) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{(e^3)^2-1}{(e^2)^2+1}\right)$
(D) $\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{e^3-1}{e^2-1}\right)-\log\left(\frac{e^3+1}{e^2+1}\right)\right)$
(E) $\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{(e^3)^2-1}{(e^2)^2-1}\right)\right)$

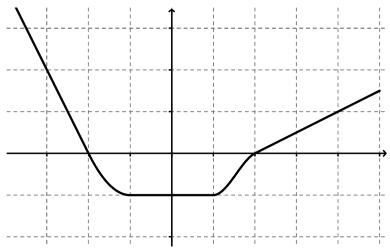
4. Se desea cercar un terreno rectangular de 2 hectáreas (es decir: 2 hectómetros cuadrados), de forma de dividir 4 regiones laterales iguales como indicado en la siguiente figura (donde las lineas punteadas representan los cercos):



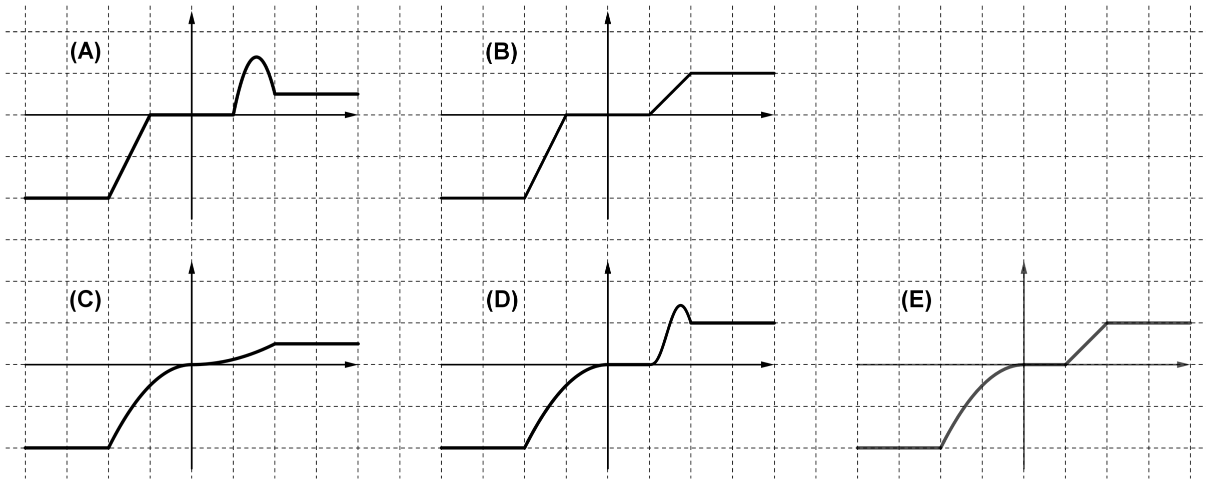
Entonces la longitud mínima de alambrado (en hectómetros) que se necesita para cercar el terreno es:

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{10}$ (E) $4\sqrt{5}$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable cuya gráfica es la siguiente:



Determinar cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función f'.



6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables. Se supone que:

I. Para todo $a \in \mathbb{R}$, la recta $r_a(f)$ tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es paralela a la recta $r_{a+1}(g)$ tangente a la gráfica de g en el punto $(a+1, g(a+1))$.

II. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

III. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, dt \; = \; 2 + \int_{0}^{2} g(t)\, dt.$

Entonces:

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$

(E) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -2$