Solución del Segundo Parcial

Cálculo Diferencial e Integral en una variable - Segundo Semestre 2018

23 de noviembre de 2018

Múltiple Opción

1.
$$F(x) = \int_{\cos x}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + t^2 \right) dt \Rightarrow$$
$$F'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} + \cos^2 x \right) \sin x = 1 + \cos^2 x \sin x \Rightarrow F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Completa en el espacio asignado (V1)

1. f es derivable en $\mathbb{R}^*$. Para que f sea derivable en $x=0$, f debe ser continua en $x=0$, para esto es suficiente que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$:

$$\lim_{x\to 0^-} = f(0) = c$$

$$\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Por lo que f es continua en $\mathbb{R}$ si $c = \sqrt{2}$.
f es derivable en $\mathbb{R}^*$. Luego, f es derivable en $x=0$ si existe y es finito $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right) x + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} x + b - \frac{1}{2} = b - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 1$$

Por lo que f es derivable en $\mathbb{R}$ si $b = \frac{3}{2}$.

2. El polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de $\cosh(x)-\frac{1}{2}+x^2$ es $P_3(\cosh(x),0)(x)-\frac{1}{2}+x^2$. Luego,

$$P_3(\cosh(x),0)(x)=\cosh(0)+\frac{\sinh(0)}{1!}x+\frac{\cosh(0)}{2!}x^2+\frac{\sinh(0)}{3!}x^3=1+\frac{1}{2!}x^2$$

Finalmente, el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de $\cosh(x)-\frac{1}{2}+x^2$ es $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2$.

Completa en el espacio asignado (V2)

1. f es derivable en $\mathbb{R}^*$. Para que f sea derivable en $x=0$, f debe ser continua en $x=0$, para esto es suficiente que $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$:

$$\lim_{x\to 0^-} = f(0)=c$$

$$\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x+\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Por lo que f es continua en $\mathbb{R}$ si $c=\sqrt{5}$.

f es derivable en $\mathbb{R}^*$. Luego, f es derivable en $x=0$ si existe y es finito $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\left(b+\frac{3}{4}\right)x+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{x}=\lim_{x\to 0^-} x+b+\frac{3}{4}=b+\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{x}=\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1=1$$

Por lo que f es derivable en $\mathbb{R}$ si $b=\frac{1}{4}$.

2. El polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de $\cosh(x)-2+\frac{1}{5}x^2$ es $P_3(\cosh(x),0)(x)-2+\frac{1}{5}x^2$. Luego,

$$P_3(\cosh(x),0)(x)=\cosh(0)+\frac{\sinh(0)}{1!}x+\frac{\cosh(0)}{2!}x^2+\frac{\sinh(0)}{3!}x^3=1+\frac{1}{2!}x^2$$

Finalmente, el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de $\cosh(x)-2+\frac{1}{5}x^2$ es $-1+\frac{7}{10}x^2$.

Desarrollo

Ejercicio 1

1. Sea $I=\int\sin^2(t)dt$. Aplicando el método de integración por partes:

$$I=-\sin(x)\cos(x)+\int\cos^2(t)dt=-\sin(x)\cos(x)+x+c-I\Rightarrow I=\frac{-\sin(x)\cos(x)+x+c}{2}$$

donde c es una constante. Finalmente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(t)dt = \left(\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}}{2}\right) - \left(\frac{-\sin(0)\cos(0)}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

2.

$$\int \frac{2t+2}{t^2+t+1}dt = \int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt + \int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{1}{u}du + \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt =$$

$$\log(t^2+t+1)+c+\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}dt = \log(t^2+t+1)+c+\sqrt{\frac{4}{3}}\int \frac{1}{v^2+1}dv =$$

$$\log(t^2+t+1)+\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+c'$$

donde c y c' son constantes.

Ejercicio 2

Supondremos, para facilitar los cálculos, que el rectángulo está orientado de forma que sus lados son paralelos a los ejes cartesianos. Sea a el lado que es paralelo al eje Ox y b el lado paralelo al eje Oy, por lo que el área del rectángulo es ab. Como los vértices del rectángulo están en $\mathcal{C}$, el área a maximizar es $A(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$, donde $x_0 = \frac{a}{2}$. $A'(x) = \frac{4-8x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ sii $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Finalmente, $a = \sqrt{2}$ y $b = 2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$.