Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Solución del segundo parcial

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 20 puntos)

Ejercicio 1 El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) e^{\mathrm{sen}(x)}\,dx$ es ...

Solución: Por el cambio de variable $u = \mathrm{sen}(x)$ (con $du = \cos(x)\,dx$), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) e^{\mathrm{sen}(x)}\,dx &= \int_0^1 u\,e^u\,du = \Big[u\,e^u\Big]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 e^u\,du \qquad \text{(int. por partes)} \\ &= \Big[u\,e^u\Big]_{u=0}^{u=1} - \Big[e^u\Big]_{u=0}^{u=1} = (e-0)-(e-1) = 1\,. \end{aligned}$$

Entonces, la opción correcta era $\boxed{1}$

Ejercicio 2 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\mathrm{sen}(x)} & \text{si } x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + bx & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Entonces los valores a, b para los que f es continua y derivable en $x = \frac{\pi}{2}$ son ...

Solución: La función f está construida pegando las dos funciones

$$f_1(x) = e^{\mathrm{sen}(x)} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = ax^2 + bx$$

en el punto $x = \frac{\pi}{2}$. Como las funciones f_1 y f_2 son continuas y derivables en $\mathbb{R}$, la función f es continua y derivable en cada uno de los dos intervalos $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$, independientemente de los valores de a y b. Para que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, se necesita estudiar su continuidad y su derivabilidad en el punto $x = \frac{\pi}{2}$.

- *Continuidad de f en $x = \frac{\pi}{2}$.* Se observa que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f_1(x) = f_1(\tfrac{\pi}{2}) = e^{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})} = e^1 = e \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f_2(x) = f_2(\tfrac{\pi}{2}) = a\big(\tfrac{\pi}{2}\big)^2 + b\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{a\pi^2}{4} + \tfrac{b\pi}{2} \end{aligned}$$

  Entonces, la función f es continua en el punto $x = \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $f(\frac{\pi}{2})$ $(= f_1(\frac{\pi}{2})) = f_2(\frac{\pi}{2})$, es decir: si y sólo si $\frac{a\pi^2}{4} + \frac{b\pi}{2} = e$.

- *Derivabilidad de f en $x = \frac{\pi}{2}$.* Ahora, se supone que f es continua en el punto $x = \frac{\pi}{2}$, es decir, que $f(\frac{\pi}{2}) = f_1(\frac{\pi}{2}) = f_2(\frac{\pi}{2})$. Se observa que

$$\begin{array}{ccccccccc} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\right) & = & \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{f_1(x)-f_1(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\right) & = & f_1'(\frac{\pi}{2}) & = & \cos(\frac{\pi}{2})e^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\right) & = & \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(\dfrac{f_2(x)-f_2(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\right) & = & f_2'(\frac{\pi}{2}) & = & 2a\frac{\pi}{2}+b & = & a\pi+b \end{array}$$

  Entonces, la función f es derivable en el punto $x = \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $f_1'(\frac{\pi}{2}) = f_2'(\frac{\pi}{2})$, es decir: si y sólo si $a\pi + b = 0$.

Al final, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{a\pi^2}{4} + \frac{b\pi}{2} & = & e \\ a\pi + b & = & 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $a = \frac{-4e}{\pi^2}$ y $b = \frac{4e}{\pi}$. Entonces, la opción correcta era: $\boxed{a = \frac{-4e}{\pi^2} \text{ y } b = \frac{4e}{\pi}}$

Ejercicio 3 Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ y las tres afirmaciones:

I. f es derivable en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
II. f tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$.
III. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1/\sqrt{2}$.

Solución: Es claro que la función f es continua en $\mathbb{R}$. Estudiemos su derivabilidad en $\mathbb{R}$.

- Para todo $x > 0$, tenemos que $f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x}$ (pues $|x| = x$). Entonces, la función f es derivable en $\mathbb{R}^+$, y su derivada en $\mathbb{R}^+$ es

$$f'(x) = \frac{1(1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{(para todo } x > 0\text{)}$$

- Para todo $x < 0$, tenemos que $f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1-x}$ (pues $|x| = -x$). Entonces, la función f es derivable en $\mathbb{R}^-$, y su derivada en $\mathbb{R}^-$ es

$$f'(x) = \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{(para todo } x < 0\text{)}$$

- En el punto $x = 0$, tenemos que

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{1}{1+|h|} \longrightarrow 1 \qquad \text{cuando } h \to 0$$

  Esto implica que f también es derivable en el punto $x = 0$, con $f'(0) = 1$.

Por lo tanto, la función f es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$: la afirmación I es verdadera. Además, tenemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (como se puede observar en los tres casos anteriores). Por lo tanto, la función f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, lo que implica que no tiene máximo absoluto: la afirmación II es falsa. Por otro lado, como f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, establece una biyección entre $\mathbb{R}$ y su imagen $f(\mathbb{R})$ (que es un intervalo de $\mathbb{R}$, pues f es continua). Para determinar el intervalo imagen $f(\mathbb{R})$, se observa que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x} \;=\; -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} \;=\; 1$$

Por lo tanto, la función f tiene imagen $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Y como $1/\sqrt{2}$ ($\approx 0,707$) $\in (-1, 1)$, se deduce que existe un punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1/\sqrt{2}$: la afirmación III es verdadera.
Otra forma de verificar que la afirnamción III es verdadera es resolver la ecuación $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Notar que un x que cumpla esa ecuacion debe ser positivo, luego buscamos $x > 0$ tal que

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

equivalentemente

$$\sqrt{2}x = 1 + x$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

En conclusión, la opción correcta era $\boxed{\text{I y III son verdaderas; II es falsa}}$

Ejercicio 4 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. El máximo intervalo I de definición de la función inversa $f^{-1} : I \to \mathbb{R}$ y su derivada son: ...
Sugerencia: Observar que $(f'(x))^2 = (f(x))^2 + 1$ y usar esta relación. (Se puede proceder análogamente a lo visto en el teórico al calcular la derivada de la función $\arcsen = \operatorname{sen}^{-1}$.)

Solución: La función f es derivable en $\mathbb{R}$, y $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y establece un biyección entre $\mathbb{R}$ y su imagen $I := f(\mathbb{R})$. Para determinar el intervalo imagen $I = f(\mathbb{R})$, se observa que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 - (+\infty) = -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = (+\infty) - 0 = +\infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $I = \mathbb{R}$: la función f es una biyección entre $\mathbb{R}$ e $I = \mathbb{R}$. Ahora, se observa que:

$$\begin{aligned}
(f'(x))^2 - (f(x))^2 &= \frac{1}{4}\big(e^x + e^{-x}\big)^2 - \frac{1}{4}\big(e^x - e^{-x}\big)^2 \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\big) - \big(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\big)\Big) = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

lo que implica que $(f'(x))^2 = (f(x))^2 + 1$. Y como $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$f'(x) = \sqrt{1 + (f(x))^2} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

Por lo anterior, la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada es

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f(f^{-1}(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Entonces la opción correcta era: $\boxed{I = \mathbb{R} \;\text{ y }\; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

Primer ejercicio de desarrollo (20 puntos)

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Completar la siguiente definición:

   f tiene máximo absoluto en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si y sólo si...

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demostrar que si f tiene máximo absoluto en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x_0) = 0$.

El siguiente es un problema real: se debe traducir primero a un problema matemático y luego aplicar los conocimientos del curso para resolverlo. Se pide así que se explique cómo se llegó a ese modelado matemático.

3. La restricción para el equipaje de bodega en la aerolínea X es de 160 cm. Esto quiere decir que la suma de las dimensiones de una valija (alto + ancho + espesor) debe ser menor o igual a 160 cm. A su vez, por cuestiones de comodidad, las valijas deben cumplir que el alto y el espesor estén en una relación de entre $2,5$ a 1 y 3 a 1.

   Determinar las dimensiones de una valija de forma que:

   - La suma de sus dimensiones sea igual a 160 cm.
   - El alto sea tres veces el espesor.
   - El volumen sea el mayor posible con las restricciones anteriores.

Solución: 1. La función f tiene máximo absoluto en el punto x_0 si y sólo si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (es decir: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x_0)$).

2. Supongamos que f tiene máximo absoluto en x_0, es decir: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x_0)$. Como f es derivable en el punto x_0, el cociente incremental $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tiene límite por la izquierda y por la derecha cuando x tiende a x_0, y ambos límites son iguales. Ahora, se observa que:

- Para todo $x < x_0$, tenemos que $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $x - x_0 < 0$, entonces

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} (\leq 0) \\ (< 0) \end{matrix} \quad \geq \ 0$$

- Para todo $x > x_0$, tenemos que $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $x - x_0 > 0$, entonces

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} (\leq 0) \\ (> 0) \end{matrix} \quad \leq \ 0$$

Por lo tanto, se deduce que

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ = \ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ = \ 0\,.$$

3. Escribamos x el alto, y el ancho y z el espesor de la valija. Las restricciones sobre las dimensiones de la valija se expresan mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= 160 && \text{(“la suma de las dimensiones es 160 cm”)} \\ x &= 3z && \text{(“el alto es tres veces el espesor”)} \end{aligned}$$

que permiten expresar el espesor z y el ancho y en función del alto x, escribiendo

$$z = \frac{x}{3} \qquad \text{e} \qquad y = 160 - x - z = 160 - x - \frac{x}{3} = 160 - \frac{4x}{3}\,.$$

Además, se observa que

$$z \left(= \tfrac{x}{3}\right) \geq 0 \quad \text{sii} \quad x \geq 0 \qquad \text{mientras} \qquad y \left(= 160 - \tfrac{4x}{3}\right) \geq 0 \quad \text{sii} \quad x \leq 120\,.$$

Así, en lo siguiente, se trabaja en el intervalo $[0, 120]$ (para la variable x), lo que nos asegura que las tres dimensiones x, y y z se mantienen positivas o nulas. Ahora, se observa que el volumen $V(x)$ de la valija se expresa en función del alto $x \in [0, 120]$ por:

$$V(x) = xyz = x\Big(160 - \frac{4x}{3}\Big)\frac{x}{3} = \frac{160x^2}{3} - \frac{4x^3}{9}\,.$$

Para maximizar el volumen $V(x)$, se observa que la función (polinomial) V es derivable en el intervalo $[0, 120]$, y que su derivada es dada por:

$$V'(x) = \frac{320x}{3} - \frac{4x^2}{3} = \frac{4x}{3}(80 - x)\,.$$

En el intervalo $[0, 120]$, se observa que

- $V'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $x = 80$,
- $V'(x) > 0$ para todo $x \in (0, 80)$ y
- $V'(x) < 0$ para todo $x \in (80, 120]$.

Entonces, la función V es estrictamente creciente en el intervalo $[0, 80]$, estrictamente decreciente en el intervalo $[80, 120]$, y alcanza su máximo absoluto en el punto $x = 80$.

x	0		80		120
$V'(x)$	0	+	0	−	−
$V(x)$	$V(0)$	$\nearrow$	$V(80)$	$\searrow$	$V(120)$

Por lo tanto, las dimensiones que maximizan el volumen de la valija son

$$\begin{aligned} x &= 80 && \text{(alto } = 80 \text{ cm)} \\ y &= 160 - \tfrac{4x}{3} = \tfrac{160}{3} && \text{(ancho } \approx 53{,}3 \text{ cm)} \\ z &= \tfrac{x}{3} = \tfrac{80}{3} && \text{(espesor } \approx 26{,}7 \text{ cm)} \end{aligned}$$

Además, el volumen correspondiente (que no era pedido) es:

$$V(80) = \frac{160(80)^2}{3} - \frac{4(80)^3}{9} = \frac{1024000}{9} \approx 137778 \text{ cm}^3 \approx 137{,}778 \text{ litros}\,.$$

Segundo ejercicio de desarrollo (20 puntos)

1. Sean una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Completar la siguiente definición:

   f es derivable en x_0 si y sólo si... Y en ese caso, la derivada de f en x_0 es...

2. Dados una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in \mathbb{R}$, demostrar que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

   $$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

   es derivable en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, y que $F'(x_0) = f(x_0)$ (Teorema fundamental).

   Aclaración: no es necesario demostrar que la función f es integrable.

3. Sea la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2}\, dt.$
   Calcular la derivada de la función G, justificando los cálculos.

Solución: 1. f es derivable en x_0 si y sólo si el cociente incremental $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tiene límite cuando x tiende a x_0, y en ese caso, la derivada de f en x_0 es

$$f'(x_0) \;:=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

2. Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, queremos demostrar que el cociente incremental

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \;=\; \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\, dt \;-\; \int_a^{x_0} f(t)\, dt\right) \;=\; \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt$$

tiende a $f(x_0)$ cuando x tiende a x_0. Para ello, se distinguen dos casos:

- Caso donde $x > x_0$. Como la función f es continua en el intervalo $[x_0, x]$, sabemos (por el teorema del valor medio) que existe un punto $c_x \in [x_0, x]$ tal que

  $$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \;=\; \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt \;=\; f(c_x)\,.$$

- Caso donde $x < x_0$. Como la función f es continua en el intervalo $[x, x_0]$, sabemos (por el teorema del valor medio) que existe un punto $c_x \in [x, x_0]$ tal que

  $$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \;=\; \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{x_0-x}\int_x^{x_0} f(t)\, dt \;=\; f(c_x)\,.$$

Además, se observa que el número real c_x asociado a cada punto $x \neq x_0$ cumple la desigualdad $|c_x - x_0| \leq |x - x_0|$ (por construcción), lo que implica que $\lim_{x\to x_0} c_x = x_0$. Y como la función f es continua en el punto x_0, se deduce por composición de límites que

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \;=\; f(c_x) \quad\longrightarrow\quad f(x_0) \qquad \text{cuando } x \to x_0\,.$$

Por lo tanto, la función F es derivable en el punto x_0, y $F'(x_0) = f(x_0)$.

3. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo anterior (pregunta 2), sabemos que F es derivable en $\mathbb{R}$, y que su derivada es $F'(x) = e^{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora, se observa que $G(x) = F(\cos x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, por la regla de la cadena, la función G es derivable en $\mathbb{R}$ y $G'(x) \;=\; F'(\cos x)\cos' x \;=\; -\operatorname{sen} x\; e^{\cos^2 x}$.