Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2023

Primer parcial

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Respuestas al MÚLTIPLE OPCIÓN							
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

La duración del parcial es de 3 horas y media y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

SÓLO PARA USO DOCENTE

MÚLTIPLE OPCIÓN								**Total**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	

Ejercicio 1

Consideremos las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = x^3 + 2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Tomemos la composición $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.
Entonces:

(A) $h(1) = 2$, h es inyectiva y no es sobreyectiva.

(B) $h(1) = 2$, h es sobreyectiva y no es inyectiva.

(C) $h(1) = 4$, h es inyectiva y no es sobreyectiva.

(D) $h(1) = 4$, h es sobreyectiva y no es inyectiva.

(E) $h(1) = 2$, h es biyectiva.

(F) $h(1) = 4$, h es biyectiva.

Ejercicio 2

Consideremos el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado por

$$A = (-2, 0) \cup \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}.$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(A) A es acotado superior e inferiormente. Tiene máximo y mínimo.

(B) A es acotado superior e inferiormente. Tiene máximo pero no mínimo.

(C) A es acotado superior e inferiormente. Tiene mínimo pero no máximo.

(D) A es acotado superior e inferiormente. No tiene ni máximo ni mínimo.

(E) A tiene supremo pero no tiene ínfimo.

(F) A tiene ínfimo pero no tiene supremo.

Ejercicio 3

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2|x-1| - x$ y $P = \{-1, 0, 3, 5\}$ una partición del intervalo $[-1, 5]$.

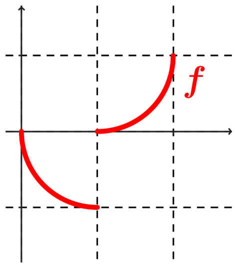
La suma inferior $S_*(f, P)$ vale:

(A) 1   (C) 8   (E) $\frac{28}{3}$

(B) 2   (D) 4   (F) $\frac{26}{3}$

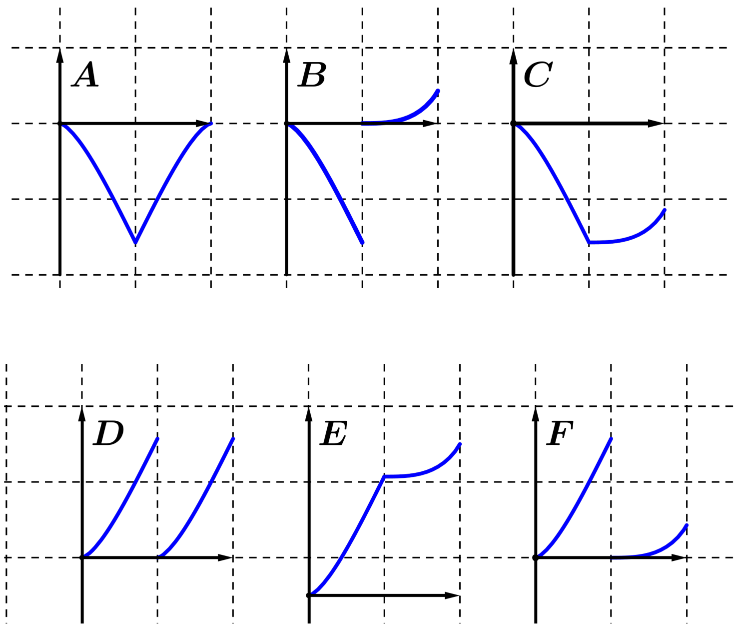
Ejercicio 4

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ la funcion cuyo grafico se muestra a continuación.



Sea $g : I \to \mathbb{R}$ la funcion definida por la expresión $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Indicar a cuál de los siguientes bosquejos corresponde el gráfico de la función g.



Ejercicio 5

Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{6}{x}$ y $g(x) = -x + 5$

El área encerrada entre los graficos de las funciones f y g es:

(A) $\frac{5}{2} - 6(\log(3) + \log(2))$

(B) $-\frac{5}{2} + 6(\log(3) + \log(2))$

(C) $\frac{15}{2} + 6(\log(3) + \log(2))$

(D) $\frac{15}{2} + (\log(3) - \log(2))$

(E) $\frac{5}{2} - 6(\log(3) - \log(2))$

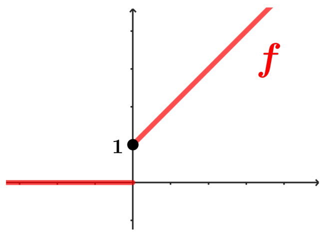
(F) $-\frac{5}{2} + 6(\log(3) - \log(2))$

Ejercicio 6

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:



(A) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (|x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon)$.

(B) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \delta$ y $|f(x) - 1| \geq \varepsilon$.

(C) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (|x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > \varepsilon)$.

(D) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x| < \delta$ y $|f(x) - 1| \leq \varepsilon$.

(E) $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - 1| < \varepsilon$.

(F) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (|x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon)$.

Ejercicio 7

Se considera el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - \lfloor x \rfloor^2}{2x}$, donde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \;/\; n \leq x\}$ es la *parte entera* de x. Indique la opción correcta:

(A) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \lfloor x \rfloor^2}{2x} = +\infty$

(B) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \lfloor x \rfloor^2}{2x} = 0$

(C) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \lfloor x \rfloor^2}{2x} = 1$

(D) El limite no existe

(E) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \lfloor x \rfloor^2}{2x} = x - 1$

(F) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \lfloor x \rfloor^2}{2x} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 8

Consideremos una funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sobreyectiva que cumple que:

- $f(-5) > 0$
- $f(1) = 0$
- $f(0) < 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(A) f se anula en al menos 4 puntos, y existe una función que cumple las condiciones de arriba y que se anula en exactamente 4 puntos.

(B) f se anula en al menos 3 puntos. Existe una función f en las condiciones de arriba que se anula en exactamente 3 puntos, y para la cual $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

(C) f se anula en al menos 5 puntos, y existe una función que cumple las condiciones de arriba y que se anula en exactamente 5 puntos.

(D) f se anula en al menos 3 puntos. Existe una función f en las condiciones de arriba que se anula en exactamente 3 puntos, y para la cual $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(E) Existe una función en las condiciones de arriba que es acotada en $(-\infty, 0]$.

(F) Existe una función en las condiciones de arriba que únicamente se anula en 1.
