Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2021

Primer parcial

9 de octubre de 2021

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 12 puntos)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que no es monótona creciente ni monótona decreciente. Entonces f no es integrable.

Respuesta correcta: F

Resolución: Basta con dar ejemplos de funciones no monotonas que sean integrables, como funciones escalonadas o $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$ por ejemplo.

El ejemplo de x^2 puede generalizarse. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$ tal que f es estrctamente creciente en $[a, c]$ y f es estrctamente decreciente en $[c, b]$. Al ser monótona en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ se tiene que f es integrable en esos intervalos, luego es integrable en el intervalo $[a, b]$ sin embargo no es monotona en dicho intervalo.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, tal que $\sup(A) = 5$.
Si $x > 5$, entonces $x \notin A$.

Respuesta correcta: V

Resolución: Si $5 = \sup(A)$ entonces es una cota superior, por tanto $\forall y \in A$ se tiene que $y \leq 5$. Lo que es equivalente a $\forall x > 5$ se tiene que $x \notin A$.

3. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Entonces la función f tiene un mínimo absoluto en $(0, 1)$.

Respuesta correcta: V

Resolución: Sea $L = f(0.5)$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > L$ para todo $x \in (0, \delta)$. Además como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ existe $\gamma > 0$ tal que $f(x) > L$ para todo $x \in (1 - \gamma, 1)$.

Consideremos el intervalo $I = [\delta, 1 - \gamma]$. Por el teorema de Weierstrass, existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. En particular, $f(x_0) \leq L = f(0.5)$.

Finalmente, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in (0, 1)$ pues $f(x) > L$ si $x \in (0, \delta) \cup (1 - \gamma, 1)$.

4. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)h(x) = b \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)g(x) = b$.

Respuesta correcta: V

Resolución:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)g(x)h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)h(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$$

Como se observa en las notas de límites y continuidad del teórico (corolario 36), el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (si estos existen). Así pues:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)h(x) = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)h(x)}{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{b}{1} = b$$

5. Una propiedad $P(n)$ se verifica para $n = 0$ y además, si se cumple $P(n)$, se cumple $P(n+2)$. Entonces $P(n)$ vale para todo natural n par.

Respuesta correcta: V

Resolución: Definamos la propiedad $Q(n)$ como $P(2n)$. Lo primero que tenemos que observar es que $P(m)$ se cumple para todo m par si solo si $P(2n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ si solo si $Q(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Base inductiva: $Q(0) = P(0)$ se cumple por hipótesis. Paso inductivo: $Q(h)$ se verifica entonces $Q(h+1)$ se verifica.

En efecto, si se verifica $Q(h)$ entonces (por definición) se verifica $P(2h)$.

Luego, por la hipótesis del ejercicio, sabemos que si se cumple $P(2h)$ entonces se cumple $P(2h+2) = P(2(h+1)) = Q(h+1)$.

Por tanto, por el principio de inducción completa se tiene que $P(2n) = Q(n)$ se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Para $z \in \mathbb{R}$, notamos por $\lfloor z \rfloor$ la parte entera de z. Entonces se tiene que $\int_2^6 \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor dx = 12$

Respuesta correcta: F

Resolución: Observemos que si $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ entonces $f(2) = 2$, $f(4) = 3$ y $f(6) = 4$ por lo tanto $\lfloor f(x) \rfloor = 2$ en el intervalo $[2, 4)$ y $\lfloor f(x) \rfloor = 3$ en el intervalo $[4, 6)$. Ahora calculemos la integral:

$$\int_2^6 \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor dx = 2(2) + 3(2) = 10$$

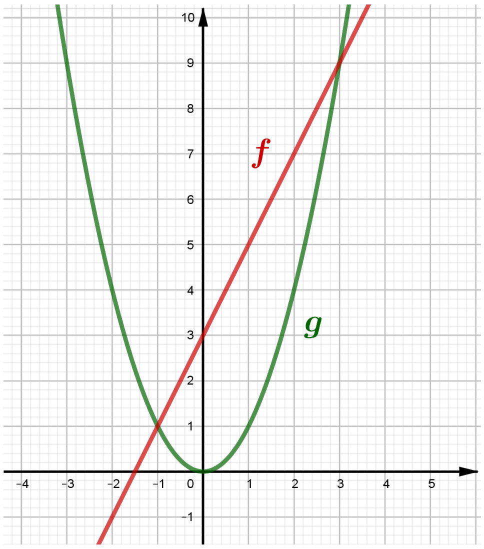
y la afirmación es **FALSA**

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 21 puntos)

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2$. El área de la región acotada encerrada entre los gráficos de f y g vale:

(A) $\frac{16}{3}$ (B) $\frac{32}{3}$ (C) $\frac{40}{3}$ (D) $\frac{88}{3}$

Resolución: Si realizamos un gráfico de la recta y parábola correspondiente obtenemos:



Además $f(x) = g(x)$ si y solo si $x^2 - 2x - 3 = 0$ y esto ocurre en $x = -1$ y $x = 3$. Por lo tanto, El área de la región acotada encerrada entre los gráficos de f y g es:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} |f-g|dx &= \int_{-1}^{3} (f-g)dx \\
&= \int_{-1}^{3} (2x+3-x^2)dx \\
&= 2\int_{-1}^{3} xdx + 3\int_{-1}^{3} dx - \int_{-1}^{3} x^2dx \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{3} +3(4) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3} \\
&= 2\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + 3(4) - \frac{27}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

2. Se considera el limite $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x-1|(x^2+2x-3)}{x^3-3x+2}$

Indique la opción correcta:

(A) El límite vale $4/3$.

(B) El límite vale 0.

(C) El límite vale $+\infty$.

(D) No existe dicho límite.

Resolución: Observar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|(x^2+2x-3)}{x^3-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{|(x-1|(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{|x-1|(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-1)(x+2)}$$

Luego

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|(x^2+2x-3)}{x^3-3x+2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-1)(x+2)} = \frac{4}{3}$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|(x^2+2x-3)}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-1)(x+2)} = \frac{-4}{3}$$

Por lo que el límite no existe.

3. Se considera el conjunto $A = \left\{\frac{2^n-1}{2^n} : \ n \in \mathbb{Z}, \ n > 0\right\}$. Indique la opción correcta:

(A) El conjunto A no está acotado superiormente.
(B) El conjunto A tiene supremo pero no máximo.
(C) El conjunto A tiene máximo y supremo.
(D) El conjunto A tiene máximo pero no supremo.

Resolución:
El conjunto A tiene supremo pero no máximo.
Observamos que

$$A = \left\{\frac{2^n-1}{2^n} : \ n \in \mathbb{Z}, \ n > 0\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n} : \ n \in \mathbb{Z}, \ n > 0\right\}.$$

Como $1/2^n > 0$ para todo $n > 0$, tenemos $1 - 1/2^n < 1 - 0 = 1$ para todo $n > 0$. Entonces 1 es una cota superior de A que no está en A. Veamos que además 1 es el supremo. Dado $\varepsilon > 0$, hay que probar que $1 - \varepsilon$ no es cota superior de A. Si tomamos $N > 0$ suficientemente grande para que se cumpla $1/2^N < \varepsilon$, entonces se cumple

$$\frac{1}{2^N} < \varepsilon \ \Rightarrow \ 1 + \frac{1}{2^N} < 1 + \varepsilon \ \Rightarrow \ 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2^N}.$$

Si $x = 1 - 1/2^N$, tenemos que $x \in A$ pero $1 - \varepsilon < x$, entonces $1 - \varepsilon$ no es cota superior de A.

Ejercicio de desarrollo (Total: 7 puntos)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Consideramos

$$d = \text{ínf}\{x \in [a, b] : \ f(x) > 0\}.$$

Probar que $f(d) = 0$.

Resolución: Vamos a probar (por absurdo) que suponer que $f(d)$ es mayor o menor que cero lleva a una contradicción. Por lo tanto $f(d) = 0$.
Supongamos que $f(d) > 0$ (observar que en este caso $d > a$).
Como f es continua en $x = d$, por el Teorema de conservación del signo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (d - \delta, d + \delta) \cap [a, b]$. Podemos suponer además que $d - \delta > a$ El punto $d - \frac{\delta}{2}$ pertenece al intervalo $(d - \delta, d + \delta)$. Por lo tanto $f(d - \frac{\delta}{2}) > 0$, lo que implica que $d - \frac{\delta}{2} \in \{x \in [a, b] : \ f(x) > 0\}$. Esto es absurdo ya que $d - \frac{\delta}{2} < d = \text{ínf}\{x \in [a, b] : \ f(x) > 0\}$.
Supongamos que $f(d) < 0$ (observar que en este caso $d < b$).
Nuevamenete, como f es continua en $x = d$, por el Teorema de conservación del signo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (d - \delta, d + \delta) \cap [a, b]$. Podemos suponer que $d + \delta < b$ Como $d = \text{ínf}\{x \in [a, b] : \ f(x) > 0\}$, tiene que existir un punto $z \in [d, d + \delta)$ y $z \in \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$. Pero como $z \in [d, d + \delta)$ se tiene que $f(z) < 0$. Esto contradice lo anterior.