Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2018

Simulacro de primer parcial

Ejercicios: Múltiple opción (Total: ?? puntos)

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados. Se define $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ y se considera la siguiente demostración de la igualdad $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, donde los símbolos y las palabras que faltan están indicados por rectángulos numerados:

> Para todo $z \in A + B$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $z = x + y$, y como $x \boxed{\mathbf{1}} \sup(A)$ e $y \boxed{\mathbf{1}} \sup(B)$, tenemos que $z = x + y \boxed{\mathbf{1}} \sup(A) + \sup(B)$.
> Entonces $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota $\boxed{\quad \mathbf{2} \quad}$ del conjunto $A + B$.
> Y como $\sup(A + B)$ es el $\boxed{\quad \mathbf{3} \quad}$ del conjunto de las cotas $\boxed{\quad \mathbf{2} \quad}$es de $A + B$, se deduce que $\sup(A + B) \boxed{\mathbf{4}} \sup(A) + \sup(B)$.
>
> Además, para todo $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $x \boxed{\mathbf{5}} \sup(A) \boxed{\mathbf{6}} \varepsilon/2$ e $y \boxed{\mathbf{5}} \sup(B) \boxed{\mathbf{6}} \varepsilon/2$, entonces:
> $\sup(A) + \sup(B) \boxed{\mathbf{7}} x + y \boxed{\mathbf{8}} \varepsilon \boxed{\mathbf{7}} \sup(A + B) \boxed{\mathbf{8}} \varepsilon$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A) + \sup(B) \boxed{\mathbf{9}} \sup(A + B)$.

Indicar la opción que permite completar la demostración de modo adecuado:

(A) **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** superior **3:** mínimo **4:** $\boxed{\leq}$ **5:** $\boxed{\leq}$ **6:** $\boxed{+}$ **7:** $\boxed{\leq}$ **8:** $\boxed{+}$ **9:** $\boxed{\leq}$

(B) **1:** $\boxed{\geq}$ **2:** inferior **3:** máximo **4:** $\boxed{\leq}$ **5:** $\boxed{\leq}$ **6:** $\boxed{+}$ **7:** $\boxed{\geq}$ **8:** $\boxed{-}$ **9:** $\boxed{\geq}$

(C) **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** superior **3:** máximo **4:** $\boxed{\geq}$ **5:** $\boxed{\geq}$ **6:** $\boxed{-}$ **7:** $\boxed{\geq}$ **8:** $\boxed{-}$ **9:** $\boxed{\geq}$

(D) **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** superior **3:** mínimo **4:** $\boxed{\leq}$ **5:** $\boxed{\geq}$ **6:** $\boxed{-}$ **7:** $\boxed{\leq}$ **8:** $\boxed{+}$ **9:** $\boxed{\leq}$

(E) **1:** $\boxed{\geq}$ **2:** inferior **3:** mínimo **4:** $\boxed{\geq}$ **5:** $\boxed{\geq}$ **6:** $\boxed{-}$ **7:** $\boxed{\leq}$ **8:** $\boxed{+}$ **9:** $\boxed{\leq}$

2. Se concideren las siguientes afirmaciones.

I. Si $\exists \lim_{x \to a}(f + g)$ entonces $\exists \lim_{x \to a} f$ o $\exists \lim_{x \to a} g$

II. Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = 0$

III. Si $\lim_{x \to a} |f| = 0$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Indique la opción correcta

(A) Todas las afirmaciones son falsas
(B) La afirmación II es verdadera y las afirmaciones I y III es falsa
(C) La afiramción III es verdadera, las afirmaciones I y II son falsas
(D) La afiramción I es verdadera y las afirmaciones II y III son falsas
(E) Las afirmaciones II y III son verdaderas y la I es falsa

3. El valor de $\int_0^3 \lfloor 2\sqrt{x} \rfloor \, dx$ es

(A) $(3/2)(3^{3/2})$
(B) La función $\lfloor 2\sqrt{x} \rfloor$ no es integrable
(C) $11/2$
(D) $\lfloor (3/2)3^{3/2} \rfloor$
(E) $1+\sqrt{3}$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} & x > 1 \end{cases}$$

Los valores de a, b que hacen que la función f sea continua en $\mathbb{R}$ son:

(A) $a = -1/2$, $b = 1/2$
(B) $a = 1$, $b = 2$
(C) $a = 0 = b$
(D) No existen valores de a y b para que la función f sea continua.
(E) $a = 3/2$, $b = 3/2$

Ejercicios de desarrollo (Total: n + m puntos)

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con lapicera, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

Los razonamientos deberán estar correctamente fundamentados en la teoría desarrollada en el curso, enunciando los teoremas usados y justificando su aplicación.

Primer ejercicio de desarrollo (n puntos)

Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}, \quad \forall n > 1$$

Segundo ejercicio de desarrollo (m puntos)

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función integrable.

1. Dado $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ definir partición del intervalo $[a, b]$ y suma superior de f para una partición.
2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ con $a < c < b$, probar que
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$
3. Sea $f(t) = \frac{1}{t}$, definimos $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $\log(x) = \int_1^x f(t)\,dt$
Probar que $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Puede serle útil recordar que
$r\int_a^b g(t)\,dt = \int_{ar}^{br} g(t/r)\,dt$.