Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Primer parcial

30 de setiembre de 2017

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de tres horas y no se permite usar ni calculadora
ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 20 puntos)

1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.
Correctas: 5 puntos. Incorrectas: entre -1 y -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 20 puntos)

Un ejercicio de desarrollo se encuentra en la hoja 3: completar en los recuadros.

PARA USO DOCENTE

D1	D2	D3	Total

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 20 puntos)

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados. Se define $A+B = \{x+y : x \in A,\ y \in B\}$ y se considera la siguiente demostración de la igualdad $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$, donde los símbolos y las palabras que faltan están indicados por rectángulos numerados:

> Para todo $z \in A+B$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $z = x+y$, y como
> $x \boxed{\mathbf{1}} \sup(A)$ e $y \boxed{\mathbf{1}} \sup(B)$, tenemos que $z = x+y \boxed{\mathbf{1}} \sup(A)+\sup(B)$.
> Entonces $\sup(A)+\sup(B)$ es una cota $\boxed{\quad\mathbf{2}\quad}$ del conjunto $A+B$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A+B) \boxed{\mathbf{3}} \sup(A)+\sup(B)$.
>
> Además, para todo $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que
> $x \boxed{\mathbf{4}} \sup(A) \boxed{\mathbf{5}} \varepsilon/2$ e $y \boxed{\mathbf{4}} \sup(B) \boxed{\mathbf{5}} \varepsilon/2$, entonces:
> $\sup(A)+\sup(B) \boxed{\mathbf{6}} x+y \boxed{\mathbf{7}} \varepsilon \boxed{\mathbf{6}} \sup(A+B) \boxed{\mathbf{7}} \varepsilon$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A)+\sup(B) \boxed{\mathbf{8}} \sup(A+B)$.

Indicar la opción que permite completar la demostración de modo adecuado:

(A) **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** $\boxed{\text{superior}}$ **3:** $\boxed{\leq}$ **4:** $\boxed{\leq}$ **5:** $\boxed{+}$ **6:** $\boxed{\leq}$ **7:** $\boxed{+}$ **8:** $\boxed{\leq}$

(B) **1:** $\boxed{\geq}$ **2:** $\boxed{\text{inferior}}$ **3:** $\boxed{\leq}$ **4:** $\boxed{\leq}$ **5:** $\boxed{+}$ **6:** $\boxed{\geq}$ **7:** $\boxed{-}$ **8:** $\boxed{\geq}$

(C) **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** $\boxed{\text{superior}}$ **3:** $\boxed{\geq}$ **4:** $\boxed{\geq}$ **5:** $\boxed{-}$ **6:** $\boxed{\geq}$ **7:** $\boxed{-}$ **8:** $\boxed{\geq}$

(D) **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** $\boxed{\text{superior}}$ **3:** $\boxed{\leq}$ **4:** $\boxed{\geq}$ **5:** $\boxed{-}$ **6:** $\boxed{\leq}$ **7:** $\boxed{+}$ **8:** $\boxed{\leq}$

(E) **1:** $\boxed{\geq}$ **2:** $\boxed{\text{inferior}}$ **3:** $\boxed{\geq}$ **4:** $\boxed{\geq}$ **5:** $\boxed{-}$ **6:** $\boxed{\leq}$ **7:** $\boxed{+}$ **8:** $\boxed{\leq}$

2. La integral $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x} \right) dx$ vale:

(A) $\frac{13}{6} - \log 2 + \log 1$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\log 2 - \frac{13}{6}$
(D) $\log 2 - \frac{3}{2}$
(E) $\frac{1}{2}$

3. Dados números $a, b, c \in \mathbb{R}$, se consideran las siguientes afirmaciones:

I. Si $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a < b$.
II. Si $a < b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.
III. Si $|a - b| \leq 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = b$.

Indicar la opción correcta:

(A) I y II son verdaderas; III es falsa.
(B) II y III son verdaderas; I es falsa.
(C) I y III son verdaderas; II es falsa.
(D) I es verdadera; II y III son falsas.
(E) III es verdadera; I y II son falsas.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que
$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 6$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$. Entonces:

(A) $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$

(B) No tiene por qué existir el límite $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ pero sí existe el límite $\lim_{x\to 0} |f(x)g(x)|$

(C) No tiene por qué existir el límite $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ ni el límite $\lim_{x\to 0} |f(x)g(x)|$

(D) $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 2$

(E) $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 6$

Ejercicio de desarrollo (Total: 20 puntos)

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con lapicera, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

En lo siguiente, se puede usar (sin demostración) el criterio de integrabilidad "a menos de ε":

Para toda función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$), las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(i) *La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.*

(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \leq S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$.*

(donde $S_*(f, P)$ y $S^*(f, P)$ designan la suma inferior y la suma superior de la función f respecto a la partición $P \subset [a, b]$).

1. Usando el criterio de integrabilidad a menos de ε, demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente, entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$.
2. Dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$, demostrar que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1/t$ para todo $t > 0$ es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Se recuerda que la función logaritmo está definida por

$$\log x \;=\; \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad \text{(para todo } x > 0\text{)}$$

y se puede usar (sin demostración) que $\log(xy) = \log x + \log y$ para todos $x, y > 0$.

3. Sea un número $x > 0$ fijado. Demostrar por inducción completa que $\log(x^n) = n \log x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.