Examen de cálculo diferencial e integral en una variable

21 de julio de 2023 | 1

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Llenar la hoja de scanner con:

- el número de cédula de identidad
- el número de lista
- el número de versión del examen (que se encuentra a un lado de la fecha)
- la respuesta a cada pregunta.

En la tabla de abajo, llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Respuestas al MÚLTIPLE OPCIÓN									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F	A	A	D	D	A	C	C	D	C

Las respuestas de la tabla se usarán sólo si hay algún problema técnico con el scanner. De no haber problemas técnicos, **las respuestas que serán tenidas en cuenta son las de la hoja de scanner**.

Cada respuesta correcta vale **10 puntos**, dos respuestas incorrectas no restan puntos, cada respuesta incorrecta a partir de la tercera **resta 2 puntos.**

Este examen dura 4 horas y se aprueba con 60 puntos.

No se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicio 1

Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $G(x) = \displaystyle\int_{2x}^{7x} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\,dt$.

Calcular $G'(0)$.

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2 (E) -3 (F) 5

Solución:

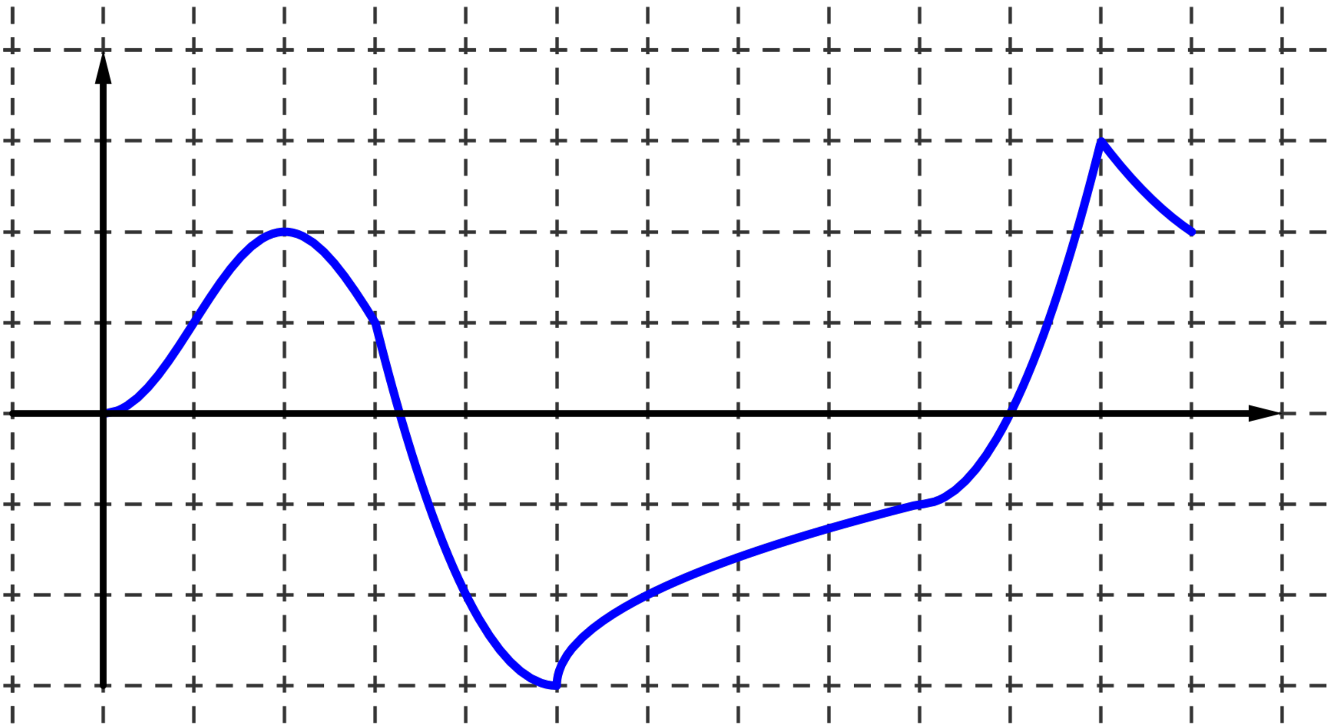
Usando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, tenemos que

$$G'(x) = 7\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(7x)}} - 2\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(2x)}},$$

por lo que $G'(0) = 5$.

Ejercicio 2

En la imagen se muestra el gráfico de una función $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$, y un cuadriculado donde cada cuadrado mide 1×1.



Sea $P = \{0, 3, 5, 9, 12\}$, que es una partición del intervalo $[0, 12]$.

El valor de $S^*(f, P)$ (la suma superior de f para la particion P) es

(A) 13 (B) 7 (C) 33 (D) -3 (E) 5 (F) 21

Solución:

$S^*(f,P) = \sup_{x\in[0,3]} f(x)\cdot(3-0) + \sup_{x\in[3,5]} f(x)\cdot(5-3) + \sup_{x\in[5,9]} f(x)\cdot(9-5) + \sup_{x\in[9,12]} f(x)\cdot(12-9) =$
$2\cdot 3 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 3\cdot 3 = 13.$

Ejercicio 3

Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{2x}\,dx$.

(A) $\dfrac{2}{5}e^{\pi} + \dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (E) $\dfrac{1}{5}$

(B) $\dfrac{1}{5}e^{\pi} + \dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{1}{5}e^{\pi}$ (F) 0

Solución:

Hallaremos una primitiva de $\sin(x)e^{2x}$, y luego calularemos la integral pedida usando la Regla de Barrow.

Aplicando el método de integración por partes (primitivizando $\sin(x)$ y derivando e^{2x}), $\displaystyle\int \sin(x)e^{2x}\,dx = -\cos(x)e^{2x} + 2\int \cos(x)e^{2x}\,dx.$

Integrando por partes nuevamente (primitivizando $\cos(x)$ y derivando e^{2x}), tenemos que

$\displaystyle\int \sin(x)e^{2x}\,dx = -\cos(x)e^{2x} + 2\int \cos(x)e^{2x}\,dx =$

$\displaystyle -\cos(x)e^{2x} + 2\left(\sin(x)e^{2x} - 2\int \sin(x)e^{2x}\,dx\right) =$

$\displaystyle -\cos(x)e^{2x} + 2\sin(x)e^{2x} - 4\int \sin(x)e^{2x}\,dx.$

Omitimos una constante aditiva ya que estamos buscando **una** primitiva de la función que queremos integrar.

De la igualdad anterior podemos despejar

$\displaystyle\int \sin(x)e^{2x}\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin(x) - \cos(x)).$

Por la relga de Barrow,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin(x) - \cos(x))\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}.$

Ejercicio 4

El valor del límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x+x^2} - (1+\log(1+x))}{x^3+x^2}$ es

(A) 0 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) 2 (E) $\frac{1}{2}$ (F) El límite no existe

<u>**Solución:**</u>

Este es un límite indeterminado de la forma $\dfrac{0}{0}$. Se puede calcular aplicando la Regla de L'Hôpital dos veces o sustituyendo tanto el numerador como el denominador por sus polinomios de Taylor en 0 de orden 2.

El polinomio de Taylor en 0 de orden 2 de x^3+x^2 es x^2.

El polinomio de Taylor en 0 de orden 2 de e^{x+x^2} se obtiene tomando el polinomio de Taylor de orden 2 de la función exponencial e^u, que es

$$1+u+\frac{u^2}{2},$$

evaluándolo en $u = x+x^2$, lo que da

$$1+(x+x^2)+\frac{(x+x^2)^2}{2},$$

y tomando sólo los términos de grado menor o igual que dos. Esto da

$$1+x+\frac{3}{2}x^2.$$

El polinomio de Taylor en 0 de orden 2 de $\log(1+x)$ es $x-\frac{x^2}{2}$. Por lo tanto el polinomio de Taylor en 0 de orden 2 de $e^{x+x^2} - (1+\log(1+x))$ es

$$1+x+\frac{3}{2}x^2 - 1 - x + \frac{1}{2}x^2 = 2x^2.$$

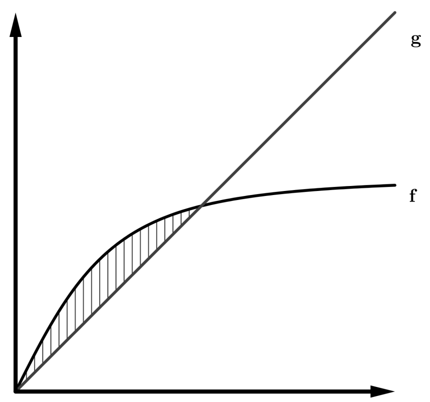
El límite pedido es por lo tanto equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Ejercicio 5

En la figura se muestran los gráficos de las funciones $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{2x^2+4}}$ y $g(x) = x$.

Calcular el área de la región rayada.



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) 1 (E) $\frac{7}{3}$ (F) $\frac{8}{3}$

Solución:

Los gráficos se itersectan en $(0,0)$ y en otro punto (x,y) con $x>0$. Calculemos el valor de x para el que esto ocurre. Cumple $f(x)=g(x)$.

Las siguientes equivalencias son ciertas para $x>0$:

$\dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+4}} = x \iff 4x = x\sqrt{2x^2+4} \iff 16x^2 = x^2(2x^2+4) \iff 16 = 2x^2+4 \iff$

$x^2 = 6 \iff x = \sqrt{6}$

Por lo tanto el área pedida es

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{4x}{\sqrt{2x^2+4}}\,dx - \int_0^{\sqrt{6}} x\,dx.$$

Usando el cambio de variable $u = 2x^2+4$,

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \frac{4x}{\sqrt{2x^2+4}}\,dx = \int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left(2\sqrt{u}\right)\Big|_4^{16} = 4.$

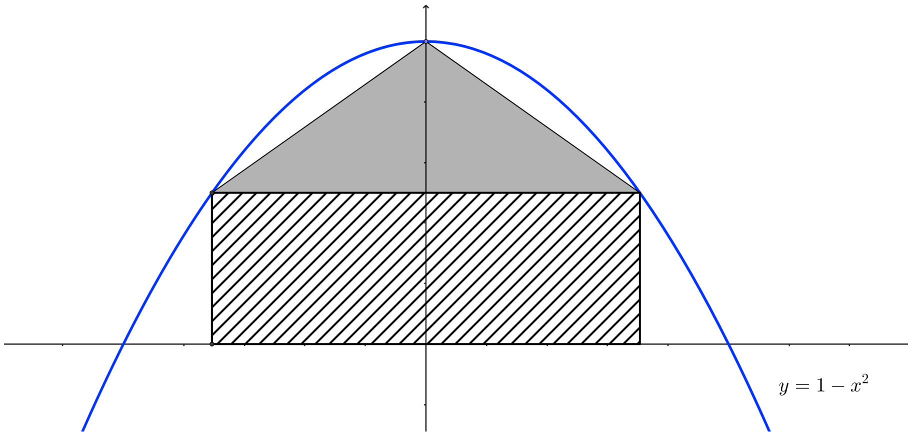
Por otro lado,

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{6}} = 3.$

Concluimos que el área pedida vale $4-3=1$.

Ejercicio 6

Dentro de la parábola $y = 1-x^2$ se quiere inscribir una figura. Dicha figura consta de un rectángulo con uno de sus lados en el eje x, y en el lado opuesto un triángulo cuyo vértice es el vértice de la parábola, como se muestra en la imagen.



Determinar la mayor área posible para una figura así (es decir, para la unión del rectángulo y el triángulo).

(A) $\frac{4}{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$ (B) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (C) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (D) $\frac{4}{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ (E) 1 (F) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

Solución:

Si llamamos $2x$ a la longitud de la base del recángulo, la base del rectángulo es el segmento $[-x, x]$ contenido en el eje x. (En coordenadas en el plano cartesiano, es el segmento que va de $(-x, 0)$ a $(x, 0)$). Si h es la altura del rectángulo, como el punto (x, h) está en la parábola, tenemos que $h = 1 - x^2$. Por lo tanto el área del rectángulo (base $\times$ altura) es

Área rectángulo $= 2x(1 - x^2)$.

Como el vértice de la parábola es el punto $(0, 1)$, la altura del triángulo es $1 - h = x^2$. Por lo tanto el área del triángulo ($\frac{1}{2} \times$ base $\times$ altura) es

Área triángulo $= x^3$.

El área total es

$$A(x) = 2x(1 - x^2) + x^3 = 2x - x^3.$$

Para hallar su máximo, buscaremos los puntos donde se anula la derivada.

$A'(x) = 2 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = \dfrac{2}{3}$.

Como $x > 0$, el único punto donde se anula $A'(x)$ es $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Para verificar que en este punto A tiene un máximo, podemos estudiar el signo de A' o calcular A''. En este caso, como $A''(x) = -6x$, es claro que $A''\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) < 0$ y hay un máximo.

El área máxima es, por lo tanto, $A\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{4}{3} \times \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ejercicio 7

Si sabemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$,
- $f(0) < 0$,
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$,

¿qué podemos afirmar sobre ella?

(A) Que se anula en al menos un punto y que es sobreyectiva.

(B) Que se anula en al menos dos puntos y que es sobreyectiva.

(C) Que se anula en al menos dos puntos y que no es sobreyectiva.

(D) Que se anula en al menos dos puntos y que tiene un solo mínimo relativo.

(E) Que se anula en al menos tres puntos y que no tiene máximo relativo.

(F) Que se anula en al menos tres puntos y que no es sobreyectiva.

Solución:

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, existe $a < 0$ de manera que para todo $x \in (-\infty, a]$, $f(x) \in (1/2, 3/2)$. (Aquí hemos usado la definición de límite con $\varepsilon = \frac{1}{2}$).

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$, existe $b > 0$ de manera que para todo $x \in [b, +\infty)$, $f(x) \in (5, 7)$. (Aquí hemos usado la definición de límite con $\varepsilon = 1$).

Por el teorema de Weierstrass, como f es continua, en el intervalo $[a, b]$ tiene máximo y mínimo. Sean M y m el máximo y el mínimo de f en $[a, b]$, respectivamente. Entonces la imagen de f está contenida en

$$(1/2, 3/2) \cup (5, 7) \cup [m, M] \neq \mathbb{R}.$$

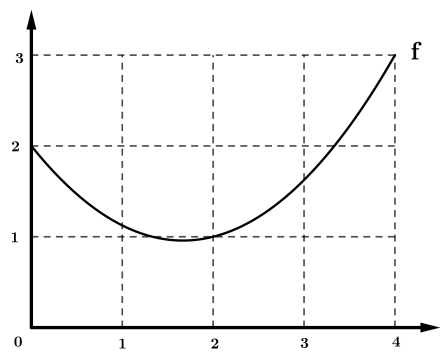
Podemos afirmar entonces que f no es sobreyectiva.

Por como hemos elegido a y b, observemos que $f(a) > 0$ y $f(b) > 0$. Como $f(0) < 0$, por el teorema de Bolzano, f tiene una raíz en el intervalo $(a, 0)$ y otra en el $(0, b)$. Por lo tanto, f se anula en al menos dos puntos.

Es fácil esbozar el gráfico de una función que cumpla las condiciones dadas y que se anule en exactamente 2 puntos. Por lo tanto la respuesta correcta es "Que se anula en al menos dos puntos y que no es sobreyectiva."

Ejercicio 8

La siguiente gráfica es de una función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ continua que es derivable en $(0, 4)$. Sabemos que el punto intermedio que nos da el teorema del valor medio de Lagrange (ese que usualmente se llama c) es 2. Determinar la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, f(2))$.



(A) $y = \frac{1}{4}x$

(B) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

(C) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

(D) $y = \frac{1}{2}x$

(E) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

(F) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Solución:

Del gráfico observamos que $f(2) = 1$, por lo que la recta pedida pasa por el punto $(2, 1)$.

El teorema del valor medio de Lagrange nos da un punto c que cumple

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{3 - 2}{4 - 0} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la recta pedida tiene pendiente $1/4$. La ecuación de la recta de pendiente $1/4$ que pasa por el punto $(2, 1)$ es $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

Ejercicio 9

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+1}}$. Indicar la opción correcta:

(A) f tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. Ninguno de los dos es un extremo absoluto.

(B) f tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. El máximo es un extremo absoluto y el mínimo no.

(C) f tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. El mínimo es un extremo absoluto y el máximo no.

(D) f tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. Ambos son además extremos absolutos.

(E) f tiene un solo extremos relativo, que es un máximo relativo.

(F) f tiene un solo extremo relativo, que es un mínimo relativo.

<u>Solución:</u>

Para hallar los extremos relativos, calculemos la derivada de f.
$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+1}} \cdot \dfrac{x^2+1-(x+1)2x}{(x^2+1)^2} = e^{\frac{x+1}{x^2+1}} \cdot \dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$.
$f'(x) = 0 \iff -x^2-2x+1 = 0 \iff x = -1+\sqrt{2}$ o $x = -1-\sqrt{2}$.
El signo de f' es el signo de la función polinómica $-x^2-2x+1$ (porque los demás términos, que aparecen multiplicando o dividiendo, son positivos). Por lo tanto $f' > 0$ en $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ (y ahí f es creciente) y $f' < 0$ en $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$ (y ahí f es decreciente). Podemos concluir que f posee un mínimo relativo en $-1-\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $-1+\sqrt{2}$.
Por otro lado, observemos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0,$$

por lo que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

Observando el crecimiento y el decrecimiento de f, vemos que los extremos relativos que hemos hallado deben ser absolutos.

Ejercicio 10

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas como:

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (la función parte entera), que asigna a cada x el mayor entero menor o igual a x. Más precisamente
$$f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n \leq x\}.$$
Por ejemplo, $f(-2{,}5) = -3$; $f(-1) = -1$; $f(0{,}5) = 0$; $f(3{,}8) = 3$.

- $g(x) = [x]$ la distancia al entero más cercano. Más precisamente
$$g(x) = \min\{|x-n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$
Por ejemplo $g(0) = 0$; $g(2{,}3) = 0{,}3$; $g(7{,}9) = 0{,}1$.

El valor del límite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ es

(A) $+\infty$ (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) 2 (F) El límite no existe.

<u>Solución:</u>

La función g siempre está acotada entre 0 y 1/2. Cuando $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$ y $f(1/x) \to +\infty$, por lo que $\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = 0.$$
