

# Examen de cálculo diferencial e integral en una variable

21 de julio de 2023 | 2

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Llenar la hoja de scanner con:

- el número de cédula de identidad
- el número de lista
- el número de versión del examen (que se encuentra a un lado de la fecha)
- la respuesta a cada pregunta.

En la tabla de abajo, llenar cada casilla con la respuesta **A, B, C, D, E** o **F** según corresponda.

Respuestas al MÚLTIPLE OPCIÓN									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	B	E	E	B	D	D	E	D

Las respuestas de la tabla se usarán sólo si hay algún problema técnico con el scanner. De no haber problemas técnicos, **las respuestas que serán tenidas en cuenta son las de la hoja de scanner.**

Cada respuesta correcta vale **10 puntos**, dos respuestas incorrectas no restan puntos, cada respuesta incorrecta a partir de la tercera **resta 2 puntos.**

Este examen dura 4 horas y se aprueba con 60 puntos.

No se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

---

**Ejercicio 1**

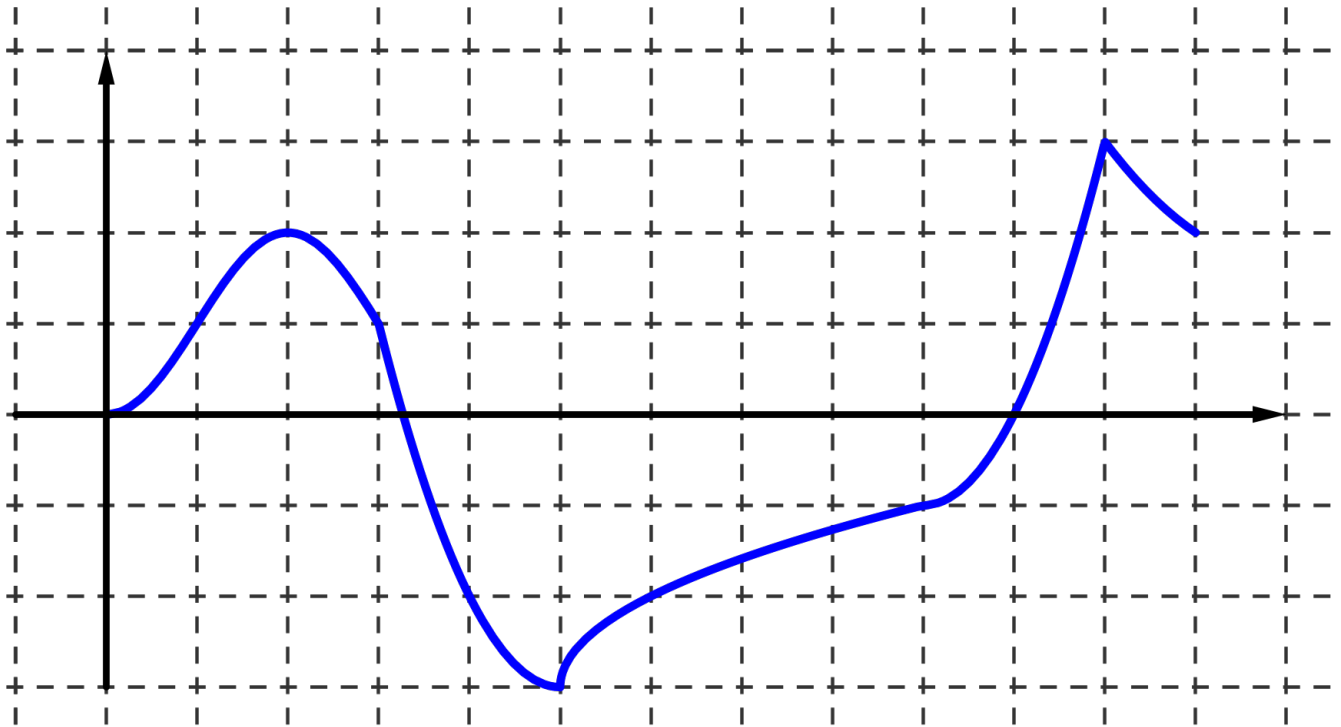
Sea  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $G(x) = \int_{2x}^{7x} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}} dt$ .

Calcular  $G'(0)$ .

- (A) 5            (B) 0            (C) -1            (D) 1            (E) 2            (F) -3
- 

**Ejercicio 2**

En la imagen se muestra el gráfico de una función  $f : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}$ , y un cuadrículado donde cada cuadrado mide  $1 \times 1$ .



Sea  $P = \{0, 3, 5, 9, 12\}$ , que es una partición del intervalo  $[0, 12]$ .

El valor de  $S^*(f, P)$  (la suma superior de  $f$  para la partición  $P$ ) es

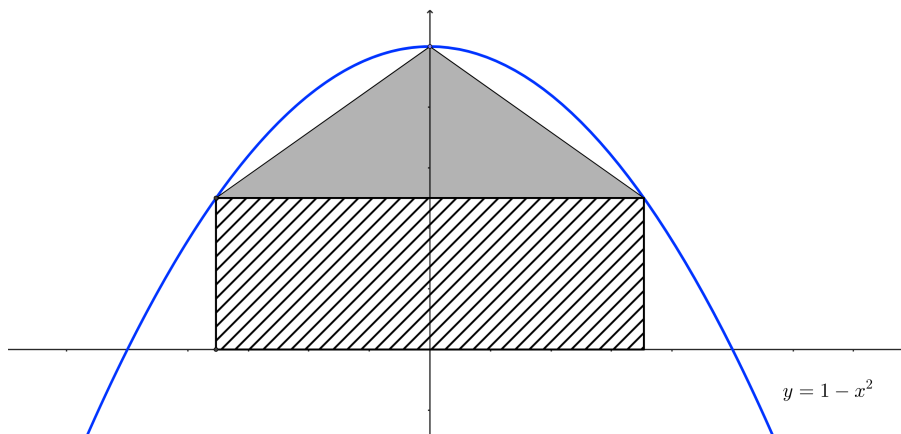
- (A) 21            (B) 13            (C) 7            (D) 33            (E) -3            (F) 5
-



---

**Ejercicio 6**

Dentro de la parábola  $y = 1 - x^2$  se quiere inscribir una figura. Dicha figura consta de un rectángulo con uno de sus lados en el eje  $x$ , y en el lado opuesto un triángulo cuyo vértice es el vértice de la parábola, como se muestra en la imagen.



Determinar la mayor área posible para una figura así (es decir, para la unión del rectángulo y el triángulo).

- (A)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$       (B)  $\frac{4}{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$       (C)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$       (D)  $\sqrt{\frac{1}{2}}$       (E)  $\frac{4}{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$       (F) 1
- 

**Ejercicio 7**

Si sabemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1,$
- $f(0) < 0,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6,$

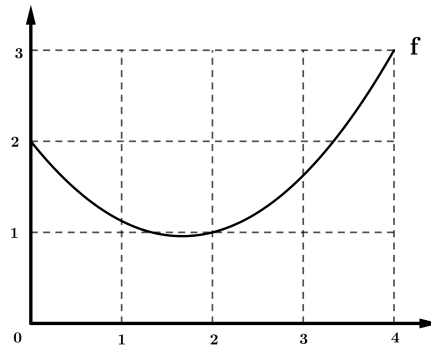
¿qué podemos afirmar sobre ella?

- (A) Que se anula en al menos tres puntos y que no es sobreyectiva.
- (B) Que se anula en al menos un punto y que es sobreyectiva.
- (C) Que se anula en al menos dos puntos y que es sobreyectiva.
- (D) Que se anula en al menos dos puntos y que no es sobreyectiva.
- (E) Que se anula en al menos dos puntos y que tiene un solo mínimo relativo.
- (F) Que se anula en al menos tres puntos y que no tiene máximo relativo.
-

---

### Ejercicio 8

La siguiente gráfica es de una función  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  continua que es derivable en  $(0, 4)$ . Sabemos que el punto intermedio que nos da el teorema del valor medio de Lagrange (ese que usualmente se llama  $c$ ) es 2. Determinar la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(2, f(2))$ .



(A)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(C)  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

(E)  $y = \frac{1}{2}x$

(B)  $y = \frac{1}{4}x$

(D)  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

(F)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

---

### Ejercicio 9

Consideremos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+1}}$ . Indicar la opción correcta:

- (A)  $f$  tiene un solo extremo relativo, que es un mínimo relativo.
- (B)  $f$  tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. Ninguno de los dos es un extremo absoluto.
- (C)  $f$  tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. El máximo es un extremo absoluto y el mínimo no.
- (D)  $f$  tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. El mínimo es un extremo absoluto y el máximo no.
- (E)  $f$  tiene dos extremos relativos: un máximo relativo y un mínimo relativo. Ambos son además extremos absolutos.
- (F)  $f$  tiene un solo extremos relativo, que es un máximo relativo.
-

---

**Ejercicio 10**

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas como:

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$  (la función parte entera), que asigna a cada  $x$  el mayor entero menor o igual a  $x$ . Más precisamente

$$f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n \leq x\}.$$

Por ejemplo,  $f(-2,5) = -3$ ;  $f(-1) = -1$ ;  $f(0,5) = 0$ ;  $f(3,8) = 3$ .

- $g(x) = [x]$  la distancia al entero más cercano. Más precisamente

$$g(x) = \min\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por ejemplo  $g(0) = 0$ ;  $g(2,3) = 0,3$ ;  $g(7,9) = 0,1$ .

El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(\frac{1}{x})}{f(\frac{1}{x})}$  es

- (A) El límite no existe.    (B)  $+\infty$     (C) 1    (D) 0    (E) -1    (F) 2