Cálculo DIferencial e Integral en una Variable

Examen Febrero 2023

18 de Febrero de 2023.

N° Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 48 puntos)			
1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 12.5 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del examen es de 3:30 hs. y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
Para aprobar se necesita un mínimo de 60 puntos.

SÓLO PARA USO DOCENTE		
MO	**Des.**	**Total**

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 50 puntos)

Correctas: 12.5 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Se considera un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{Q}$ tal que:

- si $a \in A$, entonces $a \leq \sqrt{6}$,
- $\sqrt{6}$ es punto de acumulación de A.

y un conjunto no vacío $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que :

- si $b \in B$, entonces $\sqrt{6} \leq b$.
- para cualquier $\epsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que $\sqrt{6} \leq b < \sqrt{6} + \epsilon$
- $\sqrt{6} \in B$.

Indicar la opción correcta:

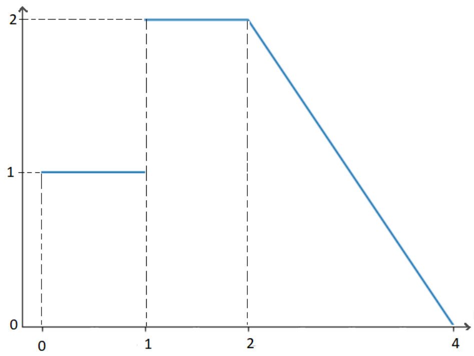
(A) Tanto el conjunto A como el conjunto B pueden ser finitos.

(B) El conjunto A necesariamente es infinito y $\sup(A) = \sqrt{6}$; el conjunto B tiene mínimo y $\min(B) = \sqrt{6}$.

(C) Los conjuntos A y B son necesariamente infinitos.

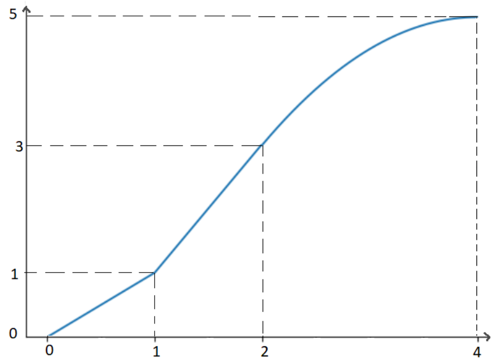
(D) El conjunto A tiene máximo, y el conjunto B tiene mínimo.

2. Sea $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ tal que el gráfico de f es el siguiente:

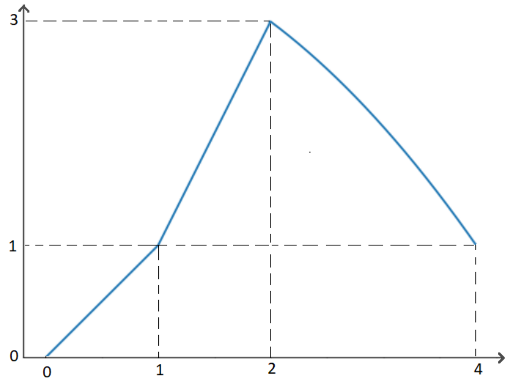


Definimos $F : [0,4] \to \mathbb{R}$ como $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

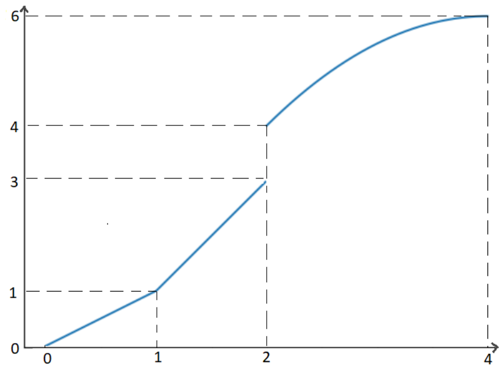
Indica cual de las siguientes figuras se corresponde con el gráfico de F.



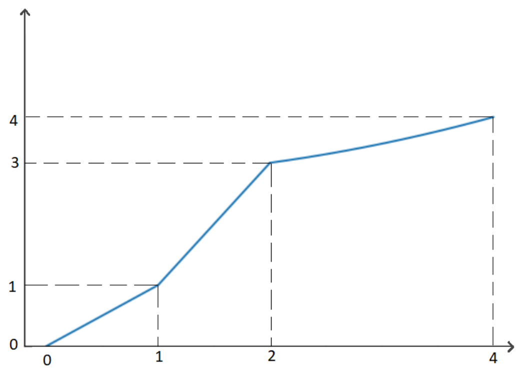
(A)



(B)



(C)



(D)

3. Indica el valor de la integral

$$\int_9^{16} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

(A) $-e^3(e-1)$
(B) $-2e^3(e-1)$
(C) $2e^3(e-1)$
(D) $e^3(e-1)$

4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases} .*$$

Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que f es continua para ese valor de α.
2. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que f tiene tanto máximo como mínimo absoluto en $[0, +\infty)$.
3. El intervalo $[-1, 1]$ está contenido en el recorrido de f para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Entonces

(A) Solamente la Afirmación 1. es verdadera.
(B) Solamente la Afirmación 2. es verdadera.
(C) Solamente la Afirmación 3. es verdadera.
(D) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

* *Arctan denota el arcotangente principal, es decir, la inversa de la función tangete restricta al intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ejercicios de desarrollo (Total: 50 puntos)

Cada ejercicio vale 25 puntos.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{\frac{|2x|}{x^2+2}}$

1. Prueba que f está acotada inferiormente. Justifica tu respuesta.
2. Prueba que f es continua en 0. Justifica tu respuesta.
3. ¿Es f derivable en 0? Justifica tu respuesta.
4. Estudia extremos absolutos en el abierto $(-a, a)$ discutiendo según $a \in \mathbb{R}^+$.

2.

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Se considera $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Prueba que F es continua $[a, b]$.

2. Considera la función $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x > 2 \\ -x & \text{si } x \leq 2 \end{cases},$$

   y la función $F : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt.$$

   (a) Realiza un bosquejo de f y además calcula $F(3)$.

   (b) Encuentra una expresión de F que no dependa del símbolo de la integral y analiza su continuidad.

   (c) ¿Es F derivable? Justifica tu respuesta.