Cálculo DIferencial e Integral en una Variable

Examen Diciembre 2022

19 de Diciembre de 2022.

N° Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 50 puntos)				
1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 10 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del examen es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
Para aprobar se necesita un mínimo de 50 puntos.

SÓLO PARA USO DOCENTE		
MO	**Des.**	**Total**

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 50 puntos)

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Sea un conjunto $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ Entonces se puede deducir que:

(A) A es un conjunto acotado y -1 es mínimo de A.
(B) A es un conjunto infinito y 1 es máximo de A.
(C) $A \cap (0,1) = \emptyset$ y A tiene máximo.
(D) A es un conjunto infinito y tiene mínimo.

2. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple $sen(x) < f(x) < sen(x) + 1$ para todo $x \in [0, 2\pi]$.

Indica la opción correcta:

(A) f es integrable y $\int_0^{2\pi} f(x)dx < 0$.

(B) f es integrable y $\int_0^{2\pi} f(x)dx > 0$.

(C) f puede no ser integrable.

(D) f es integrable y $\int_0^{2\pi} f(x)dx > \frac{1}{2}$.

3. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 - 4x^2$.
Indica la opción correcta:

(A) f es invertible en $(0, \sqrt{2})$, $f((0, \sqrt{2})) = (-4, 0)$ y $(f^{-1})\prime(-3) = -\frac{1}{4}$.

(B) f es invertible en $(0, 2)$, $f((0, 2)) = (-4, 0)$ y $(f^{-1})\prime(-3) = -\frac{1}{4}$.

(C) f es invertible en $(0, \sqrt{2})$, $f((0, \sqrt{2})) = (-4, 0)$ y $(f^{-1})\prime(-3) = \frac{1}{4}$.

(D) f es invertible en $(0, 2)$, $f((0, 2)) = (-4, 0)$ y $(f^{-1})\prime(-3) = \frac{1}{4}$.

4. Se considera la función $F\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por la integral:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \forall x > 0.$$

Indica la opción correcta:

(A) F es estrictamente creciente.

(B) F tiene máximo absoluto en $x = \frac{1+\sqrt{1+4\log(2)}}{2}$ y no tiene mínimo absoluto.

(C) F tiene un punto crítico en $x = 1$ (es decir $F'(1) = 0$) pero no presenta en ese punto un extremo relativo.

(D) F tiene máximo absoluto en $x = \frac{-1+\sqrt{1+4\log(2)}}{2}$ y el mínimo absoluto vale 0.

5. El valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 x^2 \log(x+1) dx$ es:

(A) $\dfrac{1}{6}$.

(B) $\dfrac{1}{3}\log(2)$.

(C) $\dfrac{2}{3}\log(2) + \dfrac{5}{18}$.

(D) $\dfrac{2}{3}\log(2) - \dfrac{5}{18}$.

Ejercicio de desarrollo (Total: 50 puntos)

1. Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $f(1) = f(-1) = 3$.

1. Muestra un ejemplo (análitica y/o gráficamente) de una función en estas condiciones que no presente máximo absoluto.

2. Prueba que f tiene al menos 2 raíces.

3. Sea ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $f(1) = f(-1) = 3$. Prueba que g tiene máximo absoluto.

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

1. Prueba que f está acotada.
2. Halla $\mathcal{D}(f)$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f.
3. Prueba que para cualquier $\delta > 0$, el conjunto $\mathcal{D}(f) \cap (\delta, 1]$ es finito.
4. Prueba que f es R-integrable.
5. Calcula $\int_0^1 f(t)\, dt$.