CDIV Primer semestre 2022

Solución examen 22 de julio de 2022

VERDADERO ó FALSO

1. Sea $A \subset \mathbb{Q}$ un conjunto acotado superiormente. Entonces A tiene máximo.

   FALSO. El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ es un conjunto acotado superiormente contenido en los racionales. El supremo de A es $\sqrt{2}$ que es irracional, por ende no pertenece al conjunto A. Conclusión: A no tiene máximo.

2. Sea $x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ y $z = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Entonces $x = z$.
   VERDADERO.

$$x = z \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = 1(2+\sqrt{2}) \Leftrightarrow \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x \neq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$. La función f no es integrable.

   FALSO. El conjunto de discontinuidades "acumula" en el 0. Luego, dado $\epsilon > 0$ es fácil encontrar una partición del intervalo $[0,1]$ tal que su suma superior menos su suma inferior de menos que ϵ. Esto prueba que f es integrable, dado el criterio de integrabilidad de funciones visto en teórico. Además, el ejercicio aparece en el práctico 4, parte 3, ejercicio 5 c).

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 7x^5 + x^3 + 27x + 5$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 10^{22}$.

   VERDADERO. Observamos que f es un polinómio (en particular f es continua) y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

   Luego, el teorema de Bolzano nos dice que para cualquier número $y_0 \in \mathbb{R}$ existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$. En particular para $y_0 = 10^{22}$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\frac{p}{q}) = 0$ para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   FALSO. Basta definir $f(x) = 1$ para los puntos x que son irracionales (el enunciado no dice que la función f debe ser continua, derivable, etc).

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.

   VERDADERO. El teorema fundamental del cálculo nos dice si f es continua, entonces la función F es derivable. Como toda función derivable es continua, el enunciado es verdadero.

7. Sean $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \int_x^0 \frac{dt}{t^2+1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{dt}{t^2+1}.$$

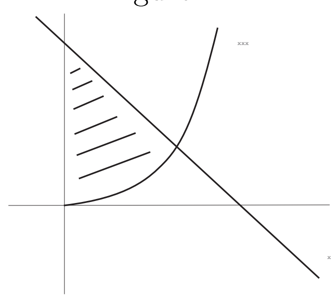
Entonces $f'(x) = -g'(x)$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

VERDADERO. Aplicando el teorema fundamental del cálculo + la regla de la cadena se obtiene que: $f'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$. Del mismo modo, derivando g obtenemos:

$$g'(x) = -\frac{1}{(1/x)^2+1} . \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

8. El área rayada, de la figura, vale $\frac{5}{4}$.

Figure 1:



VERDADERO. Lo primero es observar que los puntos de corte entre las dos gráficas son 0 y 1. Luego el área rayada vale:

$$\int_0^1 (2-x) - (x^3)\ dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. (10 puntos) El valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x).(cos(x)-1)dx$ es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x).cos(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x)dx$$

La integral de la izquierda sale con el cambio de variable $u = \sin(x)$. Luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x).cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, la integral de la derecha sale haciendo partes dos veces (práctico 11, parte 2, ejercicio 1 g):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x)dx = \left(\frac{x - sen(x)cos(x)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Luego, el valor de la integral es: $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$ (Opción A).

2. (11 puntos) El valor de $\int_0^{-1} \frac{2x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}dx$ es:

Observamos que el denomindador es un polinómio de grado 3, con raíz evidente 1. Luego aplicando Ruffini obtenemos que:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

Aplicando fracciones simples obtenemos que:

$$\frac{2x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+1}$$

Luego integrar la fracción de la izquierda es lo mismo que integrar las dos fracciones de la derecha. La primera integral vale:

$$\int_0^{-1} \frac{1}{x-1}dx = \log(|x-1|)\Big|_0^{-1} = \log(2)$$

Por otro lado la segunda integral de la derecha vale:

$$\int_0^{-1} \frac{x+2}{x^2+1} = \int_0^{-1} \frac{x}{x^2+1}dx + \int_0^{-1} \frac{2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{-1} \frac{2x}{x^2+1}dx + 2\int_0^{-1} \frac{1}{x^2+1}dx$$

Aplicando las primitivas elementales:

$$\frac{1}{2}\int_0^{-1} \frac{2x}{x^2+1}dx + 2\int_0^{-1} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\log(x^2+1)}{2}\Big|_0^{-1} + 2\arctan(x)\Big|_0^{-1} = \frac{\log(2)}{2} + 2\arctan(-1) = \frac{\log(2)}{2} - \frac{\pi}{2}$$

Sumando todo obtenemos que la integral original vale:

$$\log(2) + \frac{\log(2)}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\log(2) - \frac{\pi}{2} \quad \text{(Opción A)}$$

3. (11 puntos) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \int_0^x e^t(t - \frac{1}{2})dt$.

   Derivamos la función f y estudiamos su crecimiento y decrecimiento. Primero observamos que $f(0) = 0$. Luego, aplicando el teorema fundamental del cálculo obtenemos que $f'(x) = e^x(x - \frac{1}{2})$. La función exponencial es siempre positiva, luego basta con estudiar el signo de $x - \frac{1}{2}$ para saber el comportamiento de f. El signo de f' entonces es negativo entre 0 y 1/2, y es positivo a partir de 1/2. Luego, f presenta un mínimo absoluto en $x = 1/2$. Como la función f tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$, la función f no puede tener máximo (Opción C).

4. (11 puntos) Se considera el siguiente integral:

$$\int_0^1 e^{t^2} dt.$$

   Lo primero es observar que la función $f(t) = e^{t^2}$ es creciente. Luego el mínimo de f en el intervalo [0,1] es $f(0) = e^0 = 1$. De la misma forma el máximo de f en el intervalo [0,1] es $f(1) = e^1 = e$. Luego, por desigualdades geométricas triviales, la integral de f entre 0 y 1 debe estar entre 1 y e (Opción C).

5. (11 puntos) El valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} + x^2 - 2}{sen(x^2 - 1) + x^3 - 1}$$

   Aplicando la regla de L'Hopital y obtenemos que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} + x^2 - 2}{sen(x^2 - 1) + x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} + 2x}{2x.cos(x^2 - 1) + 3x^2} = \frac{e^0 + 2}{2.cos(0) + 3} = \frac{3}{5}$$

   Opción D.

6. (11 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

   La función f es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula nunca ($1 + |x| > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Por otro lado $|x|$ no es derivable en 0, luego tomando los cocientes incrementales según el signo de x sale directamente que la función f no es derivable en 0. La opción correcta era la C.

7. (11 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - Arctan(x)$. Entonces:

   Primero observamos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, eso descarta las primeras dos opciones.

   Luego estudiamos el signo de f' para saber de su crecimiento y decrecimiento. Obtenemos que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

   Es decir la derivada es siempre positiva, salvo en 0. Esto nos permite afirmar que la función f es creciente. Luego no puede tener un mínimo relativo en 0. Opción correcta D.