Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2021

Examen Febrero

Sábado 19 de febrero de 2022.

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

VERDADERO/FALSO (Total: 21 puntos)						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 3 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 punto.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 24 puntos)	
1	**2**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** o **G**, según corresponda.
Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del examen es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba. Para la aprobación del examen se necesitan al menos **56 puntos** .

SÓLO PARA USO DOCENTE

VF	**MO**	**Desarrollo**							**Total**
		1	2.a	2.b	3.a	3.b	3.c	3.d	

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 21 puntos)

Correctas: 3 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 punto.

El siguiente ejercicio tiene afirmaciones, las cuales se deben determinar si son verdaderas o falsas.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x - \arctan(x).$$

Afirmación 1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Afirmación 2. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Afirmación 3. f tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Afirmación 4. f es inyectiva en $\mathbb{R}$.

Afirmación 5. Sea g la inversa local de f en $f(1)$. La derivada de g en $f(1)$ es 2.

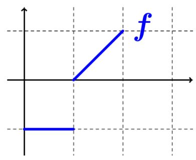
Afirmación 6. $\int_{-5}^{-4} f(t)dt > 0$.

Afirmación 7 El polinomio de Taylor en $x = 0$ de grado 3, $T_3(f, 0)$, es $T_3(f, 0) = \frac{2x^3}{3!}$.

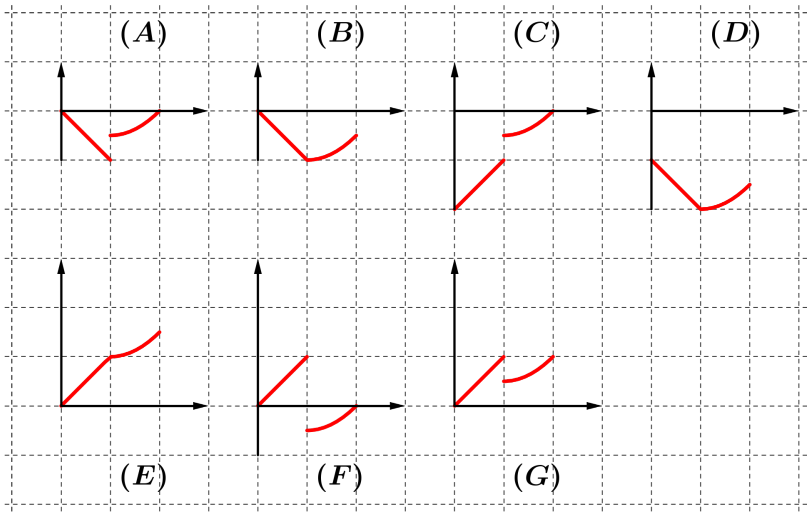
Ejercicios: Múltiple opción (Total: 24 puntos)

Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

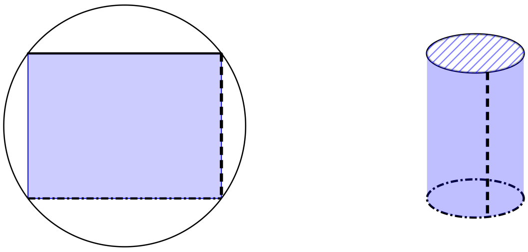
1. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como en la siguiente figura.



Consideramos $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Indicar a cual opción corresponde el gráfico de la función F.



2. Se tiene una lámina metalica circular de 1 metro de radio. Se desea construir un tubo (cilindro sin tapas) tomando como lado lateral de dicho cilindro un rectangulo inscripto en el círculo.



El mayor volumen que puede tener dicho tubo es:

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ (C) $\frac{4}{\pi 3\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}\pi$
(E) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (F) $\frac{8}{\pi 3\sqrt{3}}$ (G) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Información que puede serle util: Perímetro del círculo de radio r; $2\pi r$. Área del círculo de radio r; πr^2. Volumen del cilindro de altura h y radio r; $h\pi r^2$.

Ejercicio de desarrollo (Total: 55 puntos)

1. Para cada parte se pide calcular la integral

a) $\displaystyle\int_1^e \log(x)\, dx$. (10 puntos)

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$. (15 puntos)

2.

a) Enuncie el teorema de Lagrange (también conocido por valor medio). (6 puntos)

b) Pruebe, usando el teorema de Lagrange, que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, derivable en (a, b) y $f^{'}(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ se cumple que $f(x) = k(cte)$ para todo $x \in [a, b]$. (6 puntos)

c) Pruebe que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, derivables en (a, b) y $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ para todo $x \in (a, b)$ entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal $f(x) = k + g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. (6 puntos)

d) Sean $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} \text{ y } g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{1}{t^2 + 1}.$$

(a) Probar que $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ para todo $x \in (0, +\infty)$. (6 puntos)

(b) Es $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, +\infty)$? Justificar (6 puntos)