Cálculo diferencial e integral en una variable.

Examen – Diciembre de 2018

18 de diciembre de 2018

Ejercicios de respuesta corta (Total: 15 puntos)

1. Puntaje: 8 puntos respuesta correcta, -2 puntos respuesta incorrecta, 0 sin contestar.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\left[\sqrt{2}\sin(x)\right]$. Recordar que $[t]$ denota la parte entera de t. Calcular la integral $\int_0^\pi f(x)\,dx$.

Observemos en primer lugar que la función $g(x)=\sqrt{2}sen(x)$ es estrictamente creciente en $[0,\frac{\pi}{2}]$ y estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{2},\pi]$. Como $g(0)=0$ y $g(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=1$ la función f vale 0 en el intervalo $[0,\frac{\pi}{4})$. Luego $f(\frac{\pi}{2})=[\sqrt{2}]=1$ y por lo tanto la función vale 1 en $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$. Con un razonamiento análogo y utilizando que $g=\sqrt{2}sen(x)$ es estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{2},\pi]$ obtenemos que f vale 1 en el intervalo $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ y 0 en $(\frac{3\pi}{4},\pi]$. Por lo tanto

$$\int_0^\pi f = 1\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

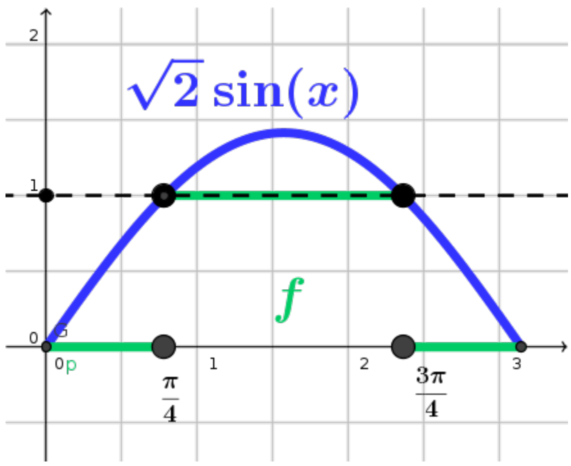


Figure 1: gráfico de la función f

2. Puntaje 7 respuesta correcta, 0 puntos respuesta incorrecta o sin contestar.

Los valores a,b,c para que

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+b\cos(\pi x)+c\log(x+1)}{x^2}=1$$

son:

a =	b =	c =

Versión 1

Llamemos $f(x) = ae^x + b\cos(\pi x) + c\log(x+1)$. Calculemos el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de f. Tenemos que $f(0) = a + b$, y sus primeras dos derivadas son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^x - b\pi\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{c}{x+1} \Rightarrow f'(0) = a + c \\ f''(x) &= ae^x - b\pi^2\cos(\pi x) - \frac{c}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = a - b\pi^2 - c \end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de f es $P_2(x) = a+b+(a+c)x+(a-b\pi^2-c)\frac{x^2}{2}$. Si escribimos $f(x) = P_2(x) + r_2(x)$, el límite a calcular resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a+b+(a+c)x+(a-b\pi^2-c)\frac{x^2}{2}+r_2(x)}{x^2}$$

Sabemos por el teorema de Taylor que $\dfrac{r_2(x)}{x^2}$ tiende a 0 cuando $x \to 0$. Así, para que ese límite sea 1, basta elegir:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \Rightarrow b = -a \\ a + c &= 0 \Rightarrow c = -a \\ a - b\pi^2 - c &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos:

$$a = \frac{2}{2+\pi^2},\ b = c = -\frac{2}{2+\pi^2}$$

Versión 2

Llamemos $f(x) = ae^{\sqrt{2}x} + b\cos(x) + c\log(x+1)$. Calculemos el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de f. Tenemos que $f(0) = a + b$, y sus primeras dos derivadas son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2}ae^{\sqrt{2}x} - b\,\mathrm{sen}(x) + \frac{c}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \sqrt{2}a + c \\ f''(x) &= 2ae^{\sqrt{2}x} - b\cos(x) - \frac{c}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = 2a - b - c \end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de f es $P_2(x) = a+b+(\sqrt{2}a+c)x+(2a-b-c)\frac{x^2}{2}$. Si escribimos $f(x) = P_2(x) + r_2(x)$, el límite a calcular resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a+b+(\sqrt{2}a+c)x+(2a-b-c)\frac{x^2}{2}+r_2(x)}{x^2}$$

Sabemos por el teorema de Taylor que $\dfrac{r_2(x)}{x^2}$ tiende a 0 cuando $x \to 0$. Así, para que ese límite sea 1, basta elegir:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \Rightarrow b = -a \\ \sqrt{2}a + c &= 0 \Rightarrow c = -\sqrt{2}a \\ 2a - b - c &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos:

$$a = \frac{2}{3+\sqrt{2}},\ b = -\frac{2}{3+\sqrt{2}},\ c = -\frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

Ejercicios de desarrollo (Total: 85 puntos).

Primer ejercicio de desarrollo (30 puntos).

a) Calcular las siguientes integrales

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx\,, \quad \int_1^3 x\log(x)dx.$$

b) Calcular

$$\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$$

Solución:

Parte **a)**

Primero resolveremos las integrales indefinidas para luego aplicar Barrow. En el primer ejercicio tenemos:

$$\int xsin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int 2xsin(x^2)dx \underset{\textbf{(I)}}{=} \frac{1}{2}\int sin(u)du = -\frac{1}{2}cos(u) \underset{\textbf{(II)}}{=} -\frac{1}{2}cos(x^2) + C$$

La identidad **(I)** se justificia aplicando el cambio de variable:
$u = x^2$, $du = 2xdx$
mientras que la identidad **(II)** se justifica deshaciendo dicho cambio.
Finalmente aplicando Barrow obtenemos

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} xsin(x^2)dx = -\frac{1}{2}cos(x^2)|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}(cos(\pi) - cos(0)) = 1$$

En el segundo ejercicio de la parte **a** tenemos:

$$\int x\log(x)dx \underset{\textbf{(I)}}{=} \frac{1}{2}x^2\log(x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Para justificar la identidad (**I**) aplicamos partes a la expresión

$$x\log(x) = f'(x)g(x)$$

donde $f'(x) = x$ y $g(x) = \log(x)$ luego tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$.
Luego, aplicando Barrow tenemos:

$$\int_1^3 xlog(x)dx = \left(\frac{1}{2}x^2log(x) - \frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_1^3 = \frac{9}{2}\log(3) - 2$$

Parte **b)**

Nuevamente resolveremos la integral indefinida para luego aplicar Barrow:

$$\int \log(x^2+1)dx \underset{\textbf{(I)}}{=} \int 1.\log(x^2+1)dx \underset{\textbf{(II)}}{=} x\log(1+x^2) - \int x\frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$\underset{\textbf{(III)}}{=} x\log(1+x^2) - 2\int 1 - \frac{1}{x^2+1}dx = x\log(1+x^2) - 2(x - \text{arctg}(x))$$

El paso **(I)** consiste simplemente en multiplicar por 1 lo que permite darle forma a la expresión para en el paso **(II)** aplicar la fórmula de integración por partes. Para esto, escribimos

$$1.\log(x^2+1) = f'(x)g(x)$$

donde $f'(x) = 1$ y $g(x) = \log(x^2+1)$ por lo que tenemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Para justificar el paso **(III)** basta aplicar fracciones simples, o simplemente tomar division de polinomios.

Finalmente, aplicando Barrow tenemos:

$$\int_0^1 \log(x^2+1)dx = x\log(1+x^2)|_0^1 - 2(x - \text{arctg}(x))|_0^1 = \log(2) - (2 - 2\text{arctg}(1)) = \log(2) - \Big(2 - \frac{\pi}{2}\Big)$$

Segundo ejercicio de desarrollo (25 puntos).

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

1 Probar que f tiene al menos una raíz.

2 Mostrar, mediante un ejemplo, que la condición de continuidad es necesaria

b) 1 Probar que un polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

2 Mostrar, mediante en ejemplo, que la condición de grado impar es necesaria.

Solución:

a.1) La idea es adaptar el problema para llegar a las hipótesis del teorema de Bolzano que garantiza existencia de raíces.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ existe K_1 tal que para todo $x < K_1$ se cumple que $f(x) < 0$. En particular existe x_1 tal que $f(x_1) < 0$.

De forma análoga Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ existe K_2 tal que que para todo $x > K_2$ se cumple que $f(x) > 0$. En particular existe x_2 tal que $f(x_2) > 0$, observar que podemos tomar $x_2 > x_1$.

Por último como f es continua aplicando Bolzano en el intervalo $[x_1, x_2]$ obtenemos que f tiene al menos una raíz.

a.2) La función

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

no es continua, cumple las otras dos propiedades indicadas y no alcanza 0 en ningún punto de $\mathbb{R}$.

b.1) Para probar esta parte mostraremos que estamos en las hipótesis de la parte a.1). La hipótesis de continuidad es inmediata.

Un polinomio de grado impar es de la forma $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ con $a_{2n+1} \neq 0$. Veamos el caso $a_{2n+1} > 0$, para el caso contrario basta multiplicar P por -1.

Para determinar los limites basta con tomar una función equivalente en ∞.

Observar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{a_{2n+1}x^{2n+1}} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \sum_{k=0}^{2n} \frac{a_k}{x^{2n+1-k}} = 1,$$

como además $\lim_{x \to +\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = +\infty$, tenemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Procediendo de forma análoga tenemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Concluimos así que P esta en las hipótesis de la parte a.1) de donde tiene una raíz.

b.2) La función $h(x) = x^2 + 1$ es un polinomio de grado par y que verifca $h(x) \geq 1$ por lo que no tiene raíces.

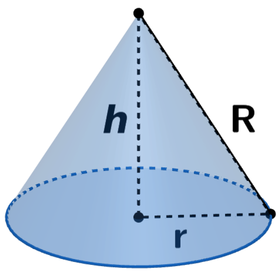
Tercer ejercicio de desarrollo (30 puntos).

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Definir máximo absoluto de f.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Probar que si f tiene un máximo absoluto en a entonces $f'(a) = 0$.

c) Se desea construir un envase con forma de cono sin tapa, como se muestra en la figura, de forma que su superficie lateral sea de $1m^2$. Determinar las dimensiones del cono de forma que su capacidad (volumen) sea máximo.

   Recordar que: volumen del cono $= \pi r^2 h/3$, superficie del cono $= \pi r R$.



Soluución:

a) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Sean $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ el volumen del cono y $S = \pi r R$ su superficie lateral. Como la superficie lateral es 1 entonces $R = \frac{1}{\pi r}$.

   Utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que $h^2 + r^2 = R^2$. Como se quiere maximizar el volumen y el volumen es máximo si el cuadrado del volumen es máximo, se va a estudiar el volumen al cuadrado (que llamaremos T).

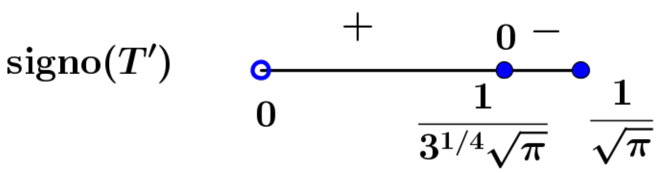
Entonces se obtiene que $T = \frac{\pi^2 r^4}{9}(\frac{1}{\pi^2 r^2} - r^2) = \frac{\pi^2}{9}(\frac{r^2}{\pi^2} - r^6)$. Observar que ahora T depende de una sola variable, más en concreto r.

Notar que la función T tiene sentido solo para los valores $r \in (0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}]$ ya que:

- los valores negativos no tienen sentido pues r es una distancia
- como $R \geq r$, si $r > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ se tiene que $S = \pi R r > \pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} > 1$ lo que es absurdo.

Estudiaremos ahora el signo de $T'(r) = \frac{\pi^2}{9}(\frac{2r}{\pi^2} - 6r^5)$

Los ceros de T' como polinomio son 0, $\frac{-1}{\pi^{1/2} 3^{1/4}}$ y $\frac{1}{\pi^{1/2} 3^{1/4}}$ y el signo esta dado por



Luego se observa que T tiene un máximo relativo en $r = \frac{1}{\pi^{1/2} 3^{1/4}}$.

Entonces las dimensiones del cono son $r = \frac{1}{\pi^{1/2} 3^{1/4}} m$, $R = \frac{3^{1/4}}{\pi^{1/2}} m$ y $h = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2} 3^{1/4}} m$.