Cálculo diferencial e integral en una variable

Solución Examen – Julio de 2018

Ejercicios: Múltiple opción

Respuestas:

Para distinguir las versiones hacemos referencia al primer ejercicio.

Versión 1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \int_1^{ax+b} \frac{1}{t^{100}+1}\, dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

...

1	2	3	4	5
B	A	C	D	A

Versión 2: La igualdad

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4) - (a(x-1) + b(x-1)^2)}{(x-1)^2} = 0$$

se cumple para los siguientes valores...

1	2	3	4	5
C	B	D	C	D

Resolución:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \int_1^{ax+b} \frac{1}{t^{100}+1}\, dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces la función f es derivable para los siguientes valores de a y b

A) $a = 2$ y $b = 1$

B) $a = 4$ y $b = 1$

C) $a = 4$ y $b = 0$

D) $a = 2$ y $b = 0$

Solución: Dado que es una función partida en $x = 0$ vamos a dividir el estudio en tres casos:

- Si $x < 0$ entonces $f(x) = \sin(2x)$, la cual es derivable (y por lo tanto continua) y su derivada es $f'(x) = 2\cos(2x)$.
- Si $x > 0$ entonces $f(x) = \int_1^{ax+b} \frac{1}{t^{100}+1}\, dt$, la cual por el teorema fundamental del Cálculo se tiene que f es derivable (y por lo tanto continua) y su derivada es $f'(x) = \frac{a}{(ax+b)^{100}+1}$. Esto último es cierto para cualquier par de valores $a, b \in \mathbb{R}$.

- Por los casos anteriores tenemos que f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. Veamos qué pasa en $x=0$.
  Continuidad:

  - $f(0)=\sin(0)=0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin(2x)=0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\int_1^{ax+b}\frac{1}{t^{100}+1}\,dt=\int_1^b\frac{1}{t^{100}+1}\,dt$

  Entonces f es continua en $x=0$ sí y sólo si $\int_1^b\frac{1}{t^{100}+1}\,dt=0$. Como $g(t)=\frac{1}{t^{100}+1}>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ se tiene que f es continua en $x=0$ sí y sólo si $b=1$.

  Derivabilidad: Por lo visto anteriormente sabemos que f es derivable para todo $x\neq 0$ y además:

  $$f'(x)=\begin{cases} 2\cos(2x) & \text{si } x<0\\ \frac{a}{(ax+1)^{100}+1} & \text{si } x>0\end{cases}$$

  Es un resultado conocido que si una función es continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y además los límites laterales de la derivada existen y coinciden, entonces f es derivable en dicho punto (Ver práctico semana 13, sección 3, ejercicio 6). Por lo tanto estudiemos los límites laterales de f'.

  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2\cos(2x)=2$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a}{(ax+1)^{100}+1}=\frac{a}{2}$

  Entonces si $a=4$ se tiene que f es derivable en $x=0$.
  Obviamente, otra alternativa es plantear el límite del cociente incremental y se debería llegar a la misma condición.

2. Sean m y M el mínimo y máximo de la función $f(x)=\frac{x+2}{x^2+4}$ en el intervalo $[-2,2]$. Entonces $M+m$ es igual a:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})}$

Solución: Notar que f es continua en el intervalo $[-2,2]$ por lo cual existe efectivamente máximo y mínimo de f en dicho intervalo. Además al ser derivable en el interior de $[-2,2]$ se tiene que los extremos de f se darán o bien en puntos interiores donde la derivada sea cero o bien en los extremos del intervalo.
Usando reglas de derivación se obtiene que:

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x+4}{(x^2+4)^2}$$

Luego la derivada es cero sí y sólo si $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$. Observar que la única solución dentro del intervalo en cuestión es $x_0 = -2 + 2\sqrt{2}$. Además f es creciente en $[-2, x_0)$ y decreciente en $(x_0, 2]$. Por lo tanto:

$$M = f(-2 + 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4(2 - \sqrt{2})}$$

Por otro lado $f(-2) = 0$ y $f(2) = \frac{1}{2}$ entonces $m = 0$ lo cual implica que $M + m = \frac{\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})}$

3. Se considera el conjunto $A = \{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 4(1 + \frac{k}{n})^3 : n \in \mathbb{N}\}$. Determinar el supremo de A. *Sugerencia:* Interpretar los elementos del conjunto A como la suma inferior $s(f, P)$ para f y P adecuados en el intervalo $[1, 2]$.

A) $\sup(A) = e$

B) $\sup(A) = 16$

C) $\sup(A) = 15$

D) $\sup(A) = \pi$

Solución: Siguiendo la sugerencia, vamos a interpretar cada elemento de A como $s(f, P_n)$ siendo P_n la particion equiespaciada de n intervalos.
Cada punto de P_n es de la forma $1 + \frac{k}{n}$ con $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Una suma inferior para f para la partición P de $[1, 2]$ vene dada por

$$s(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \inf\left(f, \left[1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n}\right]\right)$$

Observando el conjunto dado, podemos interpretar la expresión dentro de la sumatoria como evaluar $4x^3$ en el extremo izquierdo de cada segmento, lo cual coincide con el ínfimo porque $4x^3$ es monótona creciente en $[1, 2]$. Por lo tanto $A = \{s(4x^3, P_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y el supremo ha de coincidir con la integral sobre el intervalo (ver teórico), es decir:

$$\sup(A) = \int_1^2 4x^3 dx = 4\,\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 2^4 - 1^4 = 15$$

4. La igualdad

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4) - (a(x-1) + b(x-1)^2)}{(x-1)^2} = 0$$

se cumple para los siguientes valores de a y b

A) $a = 4$ y $b = -4$

B) $a = 1$ y $b = -1$

C) $a = 1$ y $b = -1/2$

D) $a = 4$ y $b = -2$

Solución: Resolvemos usando desarrollo de Taylor. Podemos hacer el siguiente cambio en la variable (o podía desarrollarse $\log(x)$ en 1)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4) - (a(x-1) + b(x-1)^2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log((x+1)^4) - (ax + bx^2)}{x^2}$$

Observemos que $\log((x+1)^4) = 4\log(x+1)$ y recordemos (o calculemos) el desarrollo de McLaurin para $\log(x+1)$:

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log((x+1)^4) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x - 4\frac{x^2}{2} + O(x^3) - (ax + bx^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(4-a)x - (2+b)x^2 + O(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4-a}{x} - (2+b)$$

Si $4 - a \neq 0$ el límite es infinito, de lo contrario es $-(2+b)$. Para que sea 0 entonces $a = 4$ y $b = -2$.

5. Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = e^{x^3 - 3x^2}$. Sea I el intervalo maximal que contiene al 3, en el cual la función H es invertible y sea g la función inversa de H en I

A) $I = [2, +\infty)$ y $g'(1) = \frac{1}{9}$

B) $I = [2, +\infty)$ y $g'(1) = -\frac{1}{3e^2}$

C) $I = \mathbb{R}$ y $g'(1) = 1$

D) $I = \mathbb{R}$ y $g'(1) = -\frac{1}{e^2}$

Solución: H es derivable en todo $\mathbb{R}$ (y en particular, continua) por lo que podemos estudiar el crecimieto (derivando) y hallar el intervalo maximal que contenga al 3 donde la derivada no cambia de signo, entonces H es estrictamente monótona (y por tanto invertible).

$$H'(x) = e^{x^3 - 3x^2}(3x^2 - 6x)$$

Para estudiar el signo, nos interesa $3x^2 - 6x$ dado que $e^{x^3-3x^2}$ es positivo. El polinomio tiene raices 0 y 2, por lo que $H'(x)$ tiene signo constante (positivo) en $[2, +\infty)$. Éste es el intervalo buscado.
Para hallar $g'(1)$ siendo g la inversa, aplicamos la fórmula para la derivada de la inversa:

$$g'(1) = \frac{1}{H'(g(1))}$$

Primero hallemos $g(1)$. Esto es la preimagen de 1 por H, es decir x tal que $e^{x^3-3x^2} = 1$, lo cual ocurre si y solo si $x^3 - 3x^2 = 0$. Como $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ tenemos $x = 0$ o $x = 3$. Solo el segundo tiene sentido dado el dominio al que nos restringimos.
Por tanto

$$g'(1) = \frac{1}{H'(3)} = \frac{1}{9}$$

Ejercicios de desarrollo.

Primer ejercicio de desarrollo.

Calcular

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{\sin(x)}\cos(x)dx$$

Solución: Considerando $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sin(x)$, se obtiene que:

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{\sin(x)}\cos(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(g(x))g'(x)dx$$

Luego usando el teorema de cambio de variable obtenemos:

$$I = \int_{g\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{g(2\pi)} f(u)du = \int_{-1}^{0} e^u du = 1 - e^{-1}$$

Segundo ejercicio de desarrollo.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Demostrar que f es continua en 0.

b) Demostrar que si $p \neq 0$, entonces f no es continua en p.

c) Demostrar que f no es integrable en el intervalo $[1, 2]$.

Solución: Veamos primero algunos aspectos de la función f, de forma informal, de modo que se entienda mejor la solución de cada parte luego.

Cerca de cada punto p en $\mathbb{R}$, hay tanto racionales como irracionales por lo que la función se ve como dos rectas y si esas rectas no se cortan en $(p, f(p))$ la función no podra ser continua en p. De igual forma las rectas determinan dos figuras con áreas distintas entre 1 y 2 por lo que f no debería ser intetgrable

Para entender la continuidad en 0 un bosquejo podria ser útil, ya que las rectas $y = 0$, $x = y$ se cortan en $(0, 0)$

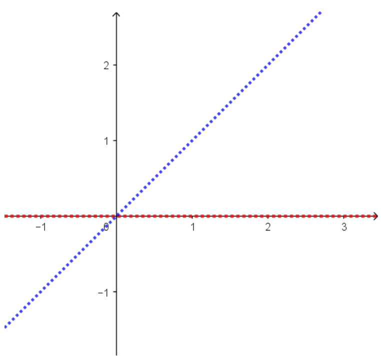

Figure 1: Bosquejo de la función f

A partir de ahora daremos argumentos formales.

Parte a. Como $f(0) = 0$, para ver que f es continua en 0 tenemos que probar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Notar que si $x \geq 0$ entonces $f(x)$ cumple que $0 \leq f(x) \leq x$. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g_1(x) = 0$ y $g_2(x) = x$. Tenemos así que $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ para todo $x \geq 0$.

Dado que $\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \lim_{x\to 0^+} g_2(x) = 0$, aplicando el teorema de Sandwich a las funciones g_i concluimos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Estudiar el límite por izquierda es análogo para la desigualdad $x \leq f(x) \leq 0$ para todo $x \leq 0$ de donde concluimos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

Por último como los límites laterales son iguales se concluye que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y por tanto f es continua en 0.

Parte b. Haremos la demostración para el caso $p > 0$, el caso negativo es análogo. Se puede demostrar que f no tiene límite en p, sin embargo es mas sencillo probar que no es continua, es decir que el límite no es $f(p)$. Separemos así en el caso de que p sea racional o no.

Caso 1: $p \notin \mathbb{Q}$.

Supongamos por absurdo que $\lim_{x\to p} f(x) = f(p) = 0$, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ si $x \in E^*(p, \delta)$.

Tomamos así $\epsilon = p/2$. Para cualquier $\delta > 0$ se tiene que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in E^*(p, \delta)$. En particular para $\delta \leq p/4$, sin embargo $f(x) = x$ y por tanto $|f(x)| = x > p - p/4 > p/2$.

Resumiendo, para todo $\delta > 0$ existe $x \in \mathbb{Q}$ con $x \in E^*(p, \delta) \cap E(p, p/4)$ tal que $|f(x)| > p/2$ lo que es absurdo.

Caso 2: $p \in \mathbb{Q}$.

Para este caso hacemos leves modificaciones del argumento anterior.

Supongamos por absurdo que $\lim_{x\to p} f(x) = f(p) = p$, es decir dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - p| < \epsilon$ si $x \in E^*(p, \delta)$.

Tomamos así $\epsilon = p/2$. Para cualquier $\delta > 0$ se tiene que existe $x \notin \mathbb{Q}$ tal que $x \in E^*(p, \delta)$. En particular para $\delta \leq p/4$, sin embargo $f(x) = 0$ y por tanto $|f(x) - p| = p > p/2$.

Resumiendo, para todo $\delta > 0$ existe $x \notin \mathbb{Q}$ con $x \in E^*(p, \delta) \cap E(p, p/4)$ tal que $|f(x) - p| > p/2$ lo que es absurdo.

Parte c. Para probar que f no es integrable en $[1, 2]$ usaremos el criterio a menos de epsilon. Es decir, probaremos que existe $\epsilon > 0$ tal que $S^*(f, P) - S_*(f, P) > \epsilon$ para toda P partición de $[1, 2]$.

Dado cualquier sub intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ en $[1, 2]$ se cumple que

- $f(x) \geq 0$
- Existe $x \in ([a_i, a_{i+1}] \setminus \mathbb{Q})$

por tanto $\inf(f, [a_i, a_{i+1}]) = 0$.

De igual manera se tiene que existe $x \in \mathbb{Q} \cap [a_i, a_{i+1}]$ donde $f(x) = x \geq a_i \geq 1$.

Tenemos así que $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \geq 1$

Por tanto, dada una partición P de $[1, 2]$, se tiene que

$$S^*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup(f, [a_i, a_{i+1}])(a_{i+1} - a_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = 1$$

y

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf(f,[a_i,a_{i+1}])(a_{i+1}-a_i) = 0$$

Concluimos así que $S^*(f,P) - S_*(f,P) \geq 1$ para toda partición, por tanto f no puede ser integrable en el intervalo $[1,2]$.

Tercer ejercicio de desarrollo.

a) Probar utilizando la fórmula de integración por partes que dado $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\ dx = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^{2n}(x)\ dx$$

b) Deducir de la parte anterior que:

$$(2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\ dx = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\ dx$$

c) Demostrar que la fórmula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

Sugerencia: Puede ser útil la identidad

$$\frac{(2n+1)!}{n!^2(n+1)2^{2n+2}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2 2^{2n+3}}$$

Solución: Parte **a)**

Para aplicar la fórmula de integración por partes escribimos:

$$sin^{2n+2}(x) = f(x)g'(x)$$

donde $f(x) = sin^{2n+1}(x) \Rightarrow f'(x) = (2n+1)sin^{2n}(x)cos(x)$
y $g'(x) = sin(x)$ por lo que tenemos que $g(x) = -cos(x)$.

Luego la fórmula de partes nos da:

$$\int_0^{\pi/2} sin^{2n+2}(x)dx = -sin^{2n+1}(x)cos(x)|_0^{\pi/2} + (2n+1)\int_0^{\pi/2} sin^{2n}cos^2(x)dx$$

Como $sin(0) = cos(\pi/2) = 0$ obtenemos $\int_0^{\pi/2} sin^{2n+2}(x)dx = (2n+1)\int_0^{\pi/2} sin^{2n}cos^2(x)dx$ como quieríamos.

Parte **b)**

Para simplificar la notación definamos $I(n) = \int_0^{\pi/2} sin^{2n}(x)dx$. Con esta notación, lo que queremos probar se escribe

$$(2n+2)I(n+1) = (2n+1)I(n)$$

y la parte anterior

$$I(n+1) = (2n+1)\int_0^{\pi/2} sin^{2n}(x)cos^2(x)dx$$

Usando la fórmula $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ tenemos

$$\int_0^{\pi/2} sin^{2n}(x)cos^2(x)dx = \int_0^{\pi/2} sin^{2n}(x)(1 - sin^2(x))dx = I(n) - I(n+1)$$

Juntado las dos partes anteriores obtenemos

$$I(n+1) = (2n+1)(I(n) - I(n+1))$$

y por lo tanto $(2n+2)I(n+1) = (2n+1)I(n)$ como queríamos.

Parte **c)**

Probaremos que

$$I(n) = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por inducción.

Base inductiva:

$$I(0) = \int_0^{\pi/2} sin^0(x)dx = \int_0^{\pi/2} 1dx = \pi/2$$

y

$$\frac{(2.0)!\pi}{(0!)^2 2^{2.0+1}} = \pi/2$$

Por lo tanto la fórmula se cumple para $n = 0$ (recordar que $0! = 1$)

Paso inductivo:

Queremos probar que si

$$I(n) = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \textbf{ (HI)}$$

entonces

$$I(n+1) = \frac{(2(n+1))!\pi}{((n+1)!)^2 2^{2(n+1)+1}} \textbf{ (TI)}$$

Por la parte **b)** tenemos que

$$I(n+1) = \int_0^{\pi/2} sin^{2n+2}(x)dx = \frac{2n+1}{2n+2} I(n)$$

luego, aplicando la hipótesis inductiva obtenemos

$$I(n+1) = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} = \frac{(2n+1)!\pi}{(n!)^2 (n+1) 2^{2n+2}}$$

Entonces usando la sugerencia probamos que la tesis inductiva es verdadera. Finalmente, el principio de inducción completa permite afirmar que la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.