Solución Problema 1 de examen de Sistemas Lineales 2

Diciembre de 2017

a) I- Como en $t < 0$ la llave está abierta la bobina está inicialmente descargada.
Dado que el condensador va a tender a descargarse asumimos que el diodo empieza conduciendo, esto nos deja el siguiente circuito en Laplace.
Para $t \geq 0$ tenemos el circuito en Laplace de la figura 1

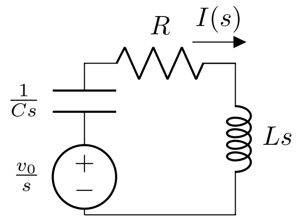

Figura 1: Equivalente en Laplace del circuito con el diodo on y llave cerrada

La corriente da:

$$I(s) = \frac{v_0}{s}\frac{1}{R+\frac{1}{Cs}+Ls} = \frac{v_0}{L}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} = \frac{v_0}{L}\frac{1}{s^2+\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v_0}{R}\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \tag{1}$$

Donde $\alpha = \frac{1}{2}\omega_n$ y $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n$
Antitransformamos usando la transformada del seno y la propiedad de traslación en frecuencia:

$$i(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v_0}{R}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\, Y(t) \tag{2}$$

$i(t)$ es la corriente por el diodo, por lo que se verifica que conduce mientras el seno sea positivo. O sea que corta en $t^* \;/\; \beta t^* = \pi \quad \Longrightarrow \quad t^* = \frac{\pi}{\beta}$.
Es de esperar que el siguiente estado del diodo sea cortado, asumimos esto y verificamos. Para $t > t^*$ el voltaje en el diodo será $v_D = -v_C$ ya que en la resistencia y la bobina no hay caída de potencial al ser la corriente nula y constante. Esto también implica que el voltaje en el condensador es constante $v_C = v_C(t^*)$.
Hallamos $v_C(t^*)$, en ese instante la corriente es nula por lo que $v_C(t^*) = v_L(t^*)$.
Calculamos entonces $v_L(t)$ para $t \in [0, t^*)$ que en Laplace es más sencillo que v_C:

$$V_L(s) = LsI(s) = v_0\frac{s}{(s+\alpha)^2+\beta^2} = v_0\frac{(s+\alpha)-\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \implies v_L(t) = v_0 e^{-\alpha t}\left(\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right) \tag{3}$$

Evaluamos en t^*:

$$v_C(t^*) = v_L(t^*) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}\pi}\left(\cos(\pi) - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\pi)\right) = -v_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \quad \therefore \quad v_D(t) = v_C(t) = -v_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} < 0 \;\; \forall \;\; t > t^* \tag{4}$$

Por lo que se verifica que el diodo no vuelve a conducir, el voltaje final del condensador es entonces $\boxed{v_C(t^*) = -v_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}}$ y el instante t_1 es $\boxed{t_1 = t^* = \frac{\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega_n}}$

II- La energía inicial y final de la bobina son nulas ya que está inicialmente descargada y termina igual. El diodo y la llave no reciben trabajo ya que siempre o el voltaje o la corriente son nulos. Por lo tanto el trabajo entregado a la resistencia será la diferencia entre la energía inicial y final del condensador:

$$W_R = \frac{C}{2}\left(v_0^2 - v_C(t_1)^2\right) = \frac{Cv_0^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}\right) \tag{5}$$

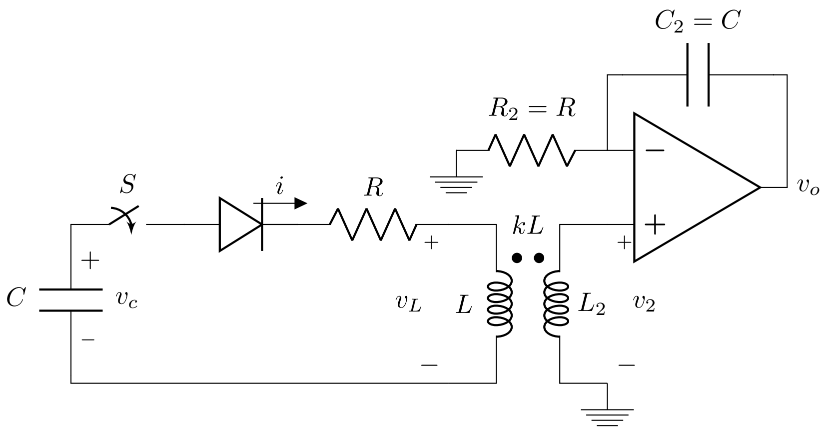

Figura 2: Se muestra la definición de i y v_2

b) I-

$$v_R(t) = v_2(t) = kv_L(t) \quad \therefore \quad p(t) = \frac{v_R^2(t)}{R} = \frac{k^2 v_L^2(t)}{R} = \begin{cases} \frac{k^2 v_0^2 e^{-2\alpha t}\left(\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right)^2}{R} & t \in [0, t_1) \\ 0 & t \notin [0, t_1) \end{cases} \tag{6}$$

II- Al no haber corriente por el secundario del transformador la malla del primario no se ve afectada por la mutua. Por lo tanto vale todo lo calculado en la parte anterior.

El operacional se comporta como un no inversor de transferencia $1 + \frac{1}{RCs}$, además el condensador $C2$ está inicialmente descargado, o sea que la salida es $v_o(t) = v_2(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t v_2(u)du$

Ahora bien, para $t > t_1$ se cumple $v_2(t) = kL\frac{di}{dt} = 0$.

Además también se cumple que $i(t > t_1) = \frac{1}{kL}\int_0^t v_2(u)du = 0$.

Por lo tanto ambos términos de v_o son nulos $\forall\ t > t_1 \quad \therefore \quad \boxed{v_o(t) = 0\ \forall\ t > t_1}$

III- Dado que en el circuito conectado al secundario también se debe cumplir tellegen y que el condensador comienza descargado y termina descargado, y la bobina del secundario siempre está en reposo, el trabajo que entrega el operacional es igual al trabajo que recibe la resistencia. Como la potencia por la resistencia es nula para $t > t_1$, el trabajo sobre la misma será:

$$W_{R_2} = \int_0^{t_1} p(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{k^2 v_L^2(t)}{R}dt = \frac{k^2}{R}\int_0^{t_1} v_L^2 dt = \boxed{\frac{k^2}{R}\frac{v_0^2}{2\omega_n}\left(1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}\right)} \tag{7}$$