Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

EXAMEN - 6 DE DICIEMBRE DE 2017

Número de examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas.
- El puntaje mínimo de aprobación es 50 puntos.

Ejercicio 1: (20 puntos)

a) Sean A y B matrices 3×3 tales que $det(A) = 3$ y $det(B) = -2$. Halle $det(2A^tB^{-1}A^2)$, explicitando las propiedades que utiliza en cada paso.

b) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$. Discuta el rango de A según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

a) $det(2A^tB^{-1}A^2) = 2^3det(A^tB^{-1}A^2) = 2^3det(A^t)det(B^{-1})det(A^2) = 2^3det(A)\frac{1}{det(B)}det(A)^2 = 2^3\frac{det(A)^3}{det(B)} = 2^33^3/-2 = -108$.

b) El rango de A vale 3 si $\alpha \neq 2, -2$ y vale 2 si $\alpha = 2$ o $\alpha = -2$.

Ejercicio 2: (15 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta.

a) Los planos $\pi)\ x - y + 2z - 2 = 0$ y $\pi')\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ son paralelos.

b) Si $T : V \to V$ es sobreyectiva entonces es también inyectiva.

c) Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ entonces $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un conjunto generador.

SOLUCIÓN:

a) Los planos π y π' son paralelos si sus vectores normales son colineales. Claramente $n_\pi = (1, -1, 2)$ y $n_{\pi'} = (1, 1, 3) \times (1, 0, 0) = (0, 3, -1)$ de donde se deduce que NO son paralelos.

b) Si $T : V \to V$ es una transformación lineal sobreyectiva entonces $dim(ImT) = dim(V)$. El teorema de las dimensiones implica entonces que $dim(N(T)) = 0$ y por lo tanto T es inyectiva.

c) Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como el espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4, sabemos que es además una base y por lo tanto es un conjunto generador.

Ejercicio 3: (20 puntos)

Considere $\mathbb{R}^4$ y los subespacios

$$S_1 = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, \quad z + t = 0\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(x, y, z, t) : x - z = 0, \quad y = 0\}$$

a) Halle $S_1 + S_2$.
b) ¿Es $S_1 + S_2$ una suma directa? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Como $S_1 = \{(-y, y, -t, t) : y, t \in \mathbb{R}\}$ una base de S_1 es $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$ y como $S_2 = \{(x, 0, x, t) : x, t \in \mathbb{R}\}$ una base de S_2 es $\{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Luego $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es un generador de $S_1 + S_2$ y además se chequea fácilmente que este conjunto es linealmnete independiente y por lo tanto es una base de $S_1 + S_2$. Entonces $\dim S_1 + S_2 = 4$ y como $S_1 + S_2 \subset \mathbb{R}^4$ se deduce que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$.

b) La suma de $S_1 + S_2$ es directa pues ya vimos que la unión da las bases de los subespacios es base de la suma. También es fácil ver que $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Ejercicio 4: (25 puntos)

a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = x + 1$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x - 1$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + x$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = x^2 + 3$$

b) Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A}$ es la base $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B} = \{x^2 \ , \ x+1 \ , \ 1 \ \}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

c) Hallar el núcleo de T. ¿ Es T inyectiva?

d) Hallar la Imagen de T. ¿ Es T sobreyectiva?

Solución:

a) La transformación T está definida sobre un conjunto de 5 vectores en un espacio de dimensión 4. Por lo tanto sabemos que por lo menos una de las matrices debe ser combinación lineal de las otras. Es fácil ver que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1). \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y por lo tanto base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esos 4 vectores que son base sabemos que determinan una única transformación lineal. Lo que falta verificar es que esa T preserva la combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual se verifica fácilmente ya que

$$x^2 + 3 = 1.(x^2+1) + 1.(x+1) + (-1).(x-1) + 0.(x^2+x).$$

b) $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x^2+1) - (x-1) = x^2 - x + 2$

$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + x$

$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x^2+x) + (x-1) = x^2 + 2x - 1$

$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x.$

Como $x^2 - x + 2 = 1.x^2 + (-1)(x+1) + 3.1$, $coord_{\mathcal{B}} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, -1, 3)$.

Análogamente se calculan las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de los transformados de las otras 3 matrices de la base $\mathcal{A}$. Entonces :

$${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil calcular que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (2b - a + d)x + (2a - 2b + c - d)$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N(T)$ sii $a = 0$, $2b - a + d = 0$ y $2a - 2b + c - d = 0$; lo cual implica que $a = c = 0$ y $d = -2b$.

Entonces $N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -2b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$.

d) Por el teorema de las dimensiones sabemos que $dim(Im(T)) = 4 - 1 = 3 = dim(\mathbb{R}_2[x])$, por lo tanto $Im(T) = \mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicio 5: (20 puntos)

Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

a) Escriba la definición de conjunto linealmente independiente.

b) Pruebe que si $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} \subset Im(T)$ es linealmente independiente, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente en V.

c) Pruebe que si T es sobreyectiva y $\{v_1, v_2, v_3\}$ es generador de V entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es generador de W.

Solución:
Ver teórico.