Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2017**

Cuarto parcial – 18 de noviembre de 2017

Número de parcial	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del parcial es 3 horas.
- El puntaje total es 30 puntos.

Ejercicio 1: (8 puntos)

a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que:

$$T(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T(x+1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T(x^2+x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A}$ es la base $\mathcal{A} = \{x^2 \ , \ x+1 \ , \ 1 \ \}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{B}$ es la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 2: (4 puntos)

Construya una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que cumpla que $N(T) =< (1,2,1) >$ y $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = b = 0 \right\}$.

Ejercicio 3: (6 puntos)

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$_{\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{A} = \{(1,0),(1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule $T(v_1), T(v_2)$ y $T(v_3)$.

b) Pruebe que T es sobreyectiva pero no inyectiva.

Ejercicio 4: (6 puntos)

a) Escriba la definición de transformación lineal $T : V \to W$ inyectiva.

b) Pruebe que si $T : V \to V$ es inyectiva entonces es también sobreyectiva.

c) Pruebe que si $T : V \to W$ es inyectiva y $\mathcal{A} = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente entonces $T(\mathcal{A}) = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\} \subset W$ es linealmente independiente también.

Ejercicio 5: (6 puntos)

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por: $T(a,b,c,d) = (a+b)x^2 + (a-b)x + a$.

a) Obtenga una base de $N(T)$.

b) Obtenga una base de $Im(T)$.