Solución del cuarto parcial

Ejercicio 1

a) Como $x^2 + x = (x^2 + 1) + (x - 1)$, si queremos que exista una T lineal, deberá verificar que $T(x^2 + x) = T(x^2 + 1) + T(x - 1)$. Esto último se verifica ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego como $\{x^2 + 1, x + 1, x - 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y una transformacin lineal queda bien definida si conocemos los transformados de una base, se concluye que existe una única transformacin lineal que verifica lo pedido.

b) Para hallar la matriz asociada debemos calcular $T(x^2), T(x + 1)$ y $T(1)$ y luego hallar sus coordenadas en la base B. Para esto, como

$$\begin{aligned} x^2 = (x^2+1) - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow T(x^2) &= T(x^2+1) - \frac{1}{2}T(x+1) + \frac{1}{2}T(x-1) \\ \Rightarrow T(x^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$T(x+1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ está dado en la letra del ejercicio.

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow T(1) &= \frac{1}{2}T(x+1) - \frac{1}{2}T(x-1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{coord}_B\, T(x^2) &= (1, 0, -2, 1) \\ \mathrm{coord}_B\, T(x+1) &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathrm{coord}_B\, T(1) &= (0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Plantearemos dos formas posibles de resolver este ejercicio. Una de ellas consiste en hallar las condiciones que caracterizan al $N(T)$ y a partir de éstas dar la expresión general de T:

$$N(T) = <(1, 2, 1)> = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y - 2z = 0\}$$

por lo tanto definiendo

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x-z & y-2z \end{pmatrix}$$

se verificarán las condiciones requeridas para T.

Otra forma posible de resolver este ejercicio consiste en definir T en una base del dominio, pues como ya sabemos una transformación lineal queda definida si conocemos los transformados de una base. Como $(1,2,1) \in N(T)$, $T(1,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Además como el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $Im(T)$ bastará con elegir dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\{(1,2,1), v_1, v_2\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$ y $T(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podemos elegir por ejemplo $v_1 = (1,0,0)$ y $v_2 = (0,1,0)$ y definir entonces $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ por:

$$T(1,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

a) Por definición de matriz asociada tenemos que:

$$T(v_1) = 1(1,0) + 1(1,1) = (2,1)$$

$$T(v_2) = 1(1,0) + 2(1,1) = (3,2)$$

$$T(v_3) = 2(1,0) + 3(1,1) = (5,3)$$

b) En primer lugar veamos que T es sobreyectiva. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y T es lineal resulta que $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es un generador de $Im(T)$. Por lo calculado en la parte a) tenemos entonces que $\{(2,1),(3,2),(5,3)\}$ genera a $Im(T)$. Como $(5,3)$ es C.L de $\{(2,1),(3,2)\}$ y este último conjunto es L.I resulta que $\{(2,1),(3,2)\}$ es base de $Im(T)$ y por lo tanto la $\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, lo que permite concluir que $Im(T) = \mathbb{R}^2$ y por lo tanto T resulta sobreyectiva.
Para probar que T no es inyectiva alcanza con probar que $\dim N(T) > 0$. Para esto, haciendo uso del teorema de las dimensiones sabemos que

$$3 = \dim \mathbb{R}_2[x] = \dim N(T) + \dim Im(T) = dim N(T) + 2$$

de lo que se deduce que $\dim N(T) = 1$ y por lo tanto T no es inyectiva.

Ejercicio 4

a) T es inyectiva si cumple que $T(v_1) = T(v_2)$ si y solo si $v_1 = v_2$.

b) Una condición necesaria y suficiente para que T sea inyectiva es que $N(T) = \{0\}$. Luego por el teorema de las dimensiones tenemos que:

$$\dim V = \dim N(T) + \dim Im(T) = 0 + dimIm(T)$$

y por lo tanto $\dim V = \dim Im(T)$ y puesto que $Im(T) \subset V$ se deduce que $Im(T) = V$, de donde resulta T sobreyectiva.

c) Para probar que $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es L.I hay que probar que si $a_1T(v_1)+\cdots+a_nT(v_n) = 0$ entonces $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

$$0 = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n)$$

y por lo tanto $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in N(T)$. Como T es inyectiva, $N(T) = \{0\}$, por lo tanto $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ y como tenemos que el conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es L.I deben ser $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Ejercicio 5

a)

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : T(a,b,c,d) = 0\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a+b)x^2 + (a-b)x + a = 0\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b = 0, a-b = 0, a = 0\} = \{(0,0,c,d) : c,d \in \mathbb{R}\} \\ &=< (0,0,1,0), (0,0,0,1) > \end{aligned}$$

y por lo $\{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ es una base de $N(T)$.

b) Para hallar una base de $Im(T)$ calculemos primero un generador y a partir de éste obtendremos la base. Para hallar un generador de $Im(T)$ alcanza con hallar los transformados de una base del dominio. Para esto, consideremos $A = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Luego $T(A) = \{T(1,0,0,0), T(0,1,0,0), T(0,0,1,0), T(0,0,0,1)\}$ genera la $Im(T)$. Entonces:

$$Im(T) =< T(1,0,0,0), T(0,1,0,0), T(0,0,1,0), T(0,0,0,1) >=< x^2 + x + 1, x^2 - x > .$$

Como el conjunto $\{x^2 + x + 1, x^2 - x\}$ es además L.I resulta ser una base de $Im(T)$.