

Respuesta en frecuencia.

Sistemas de orden 1 y 2

Margen de fase y resp. Transitoria.

Transparencias

Introducción a la Teoría de Control

R. Canetti 2013

Respuesta en frecuencia típica

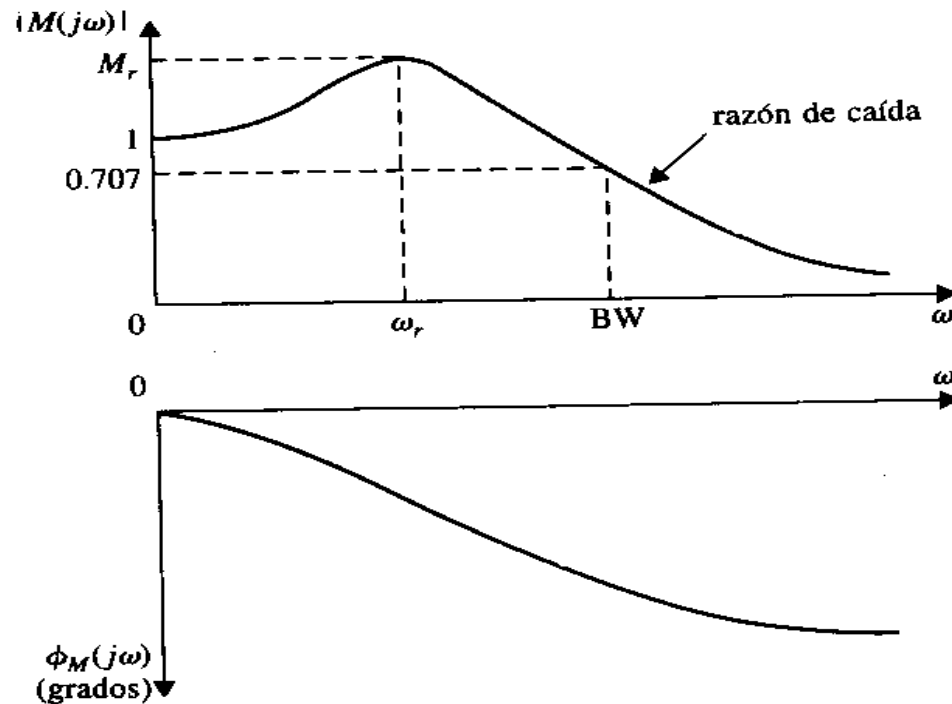


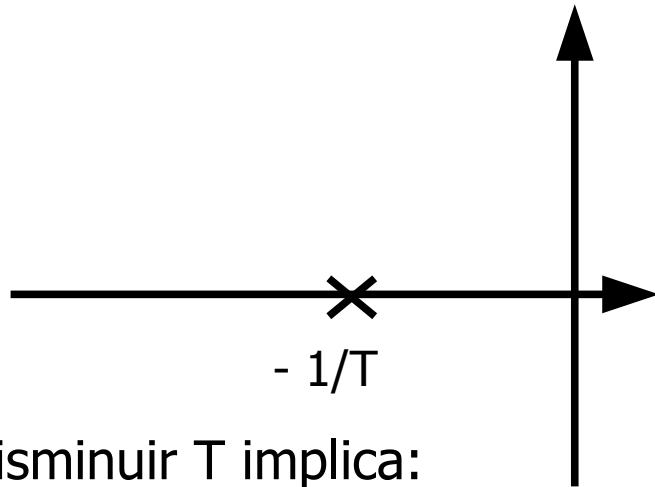
Figura 9-2 Características típicas de ganancia y fase de un sistema de control realimentado.

Si la respuesta tiene una forma similar a la de la figura, se define:

- Pico de resonancia (M_r), al valor máximo de la respuesta en frecuencia.
- Frecuencia de resonancia (ω_r), la frecuencia a la que ocurre dicho máximo.
- Ancho de banda (BW), la frecuencia a la que la ganancia cae a $\sqrt{2}/2$ de la ganancia en bajas frecuencias.

Sistema de orden 1:

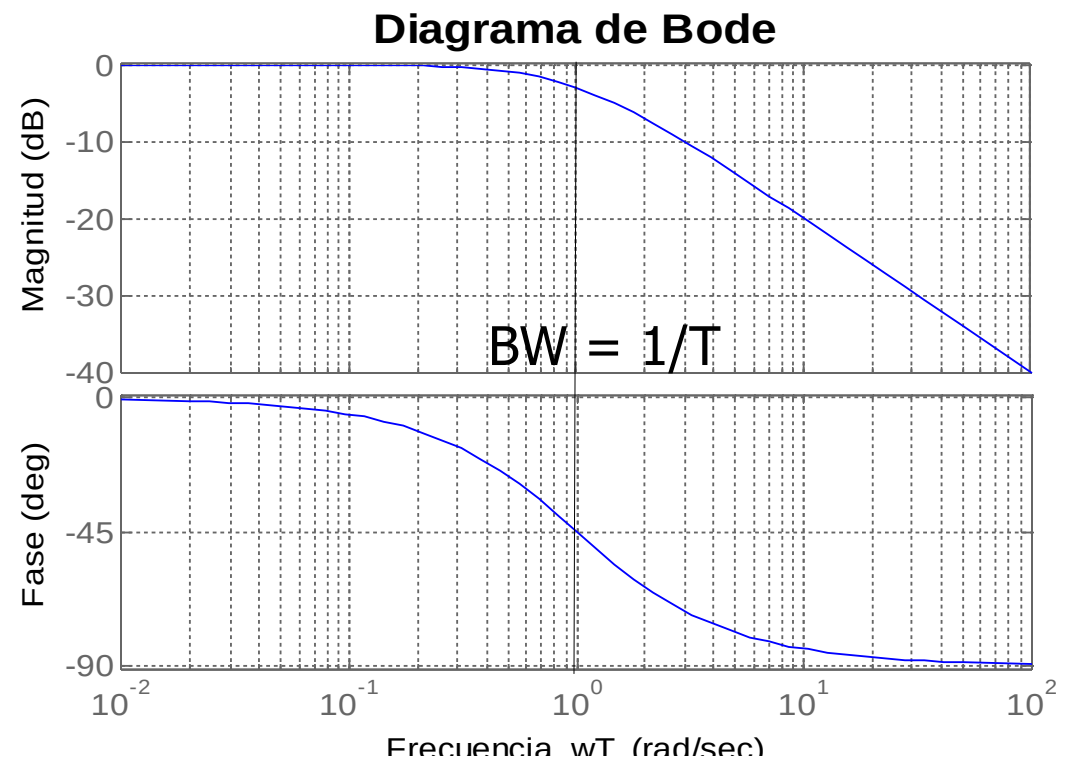
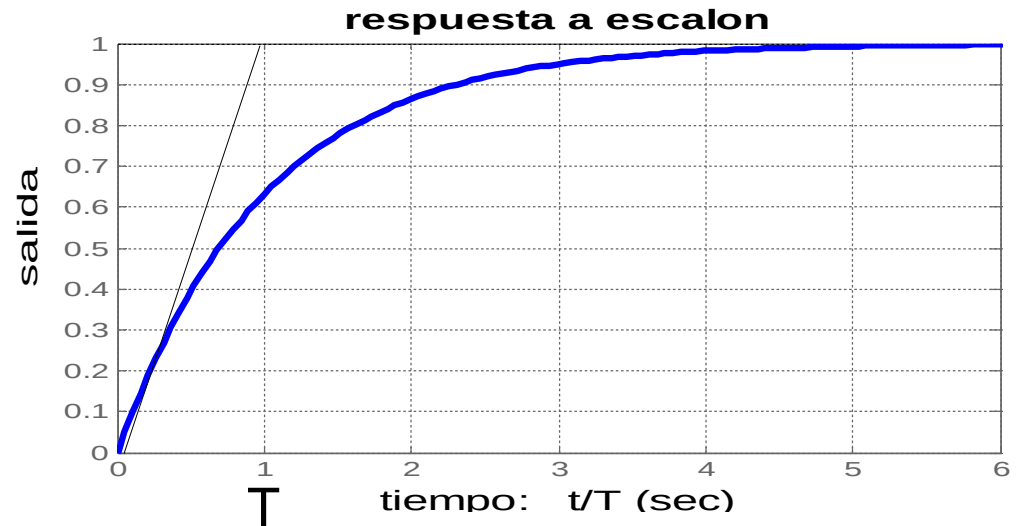
$$H(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



Disminuir T implica:

- contraer el eje del tiempo.
- respuesta más rápida.
- expandir el eje de frecuencias.
- mayor ancho de banda.

(y vice-versa)



Sistema de segundo orden:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

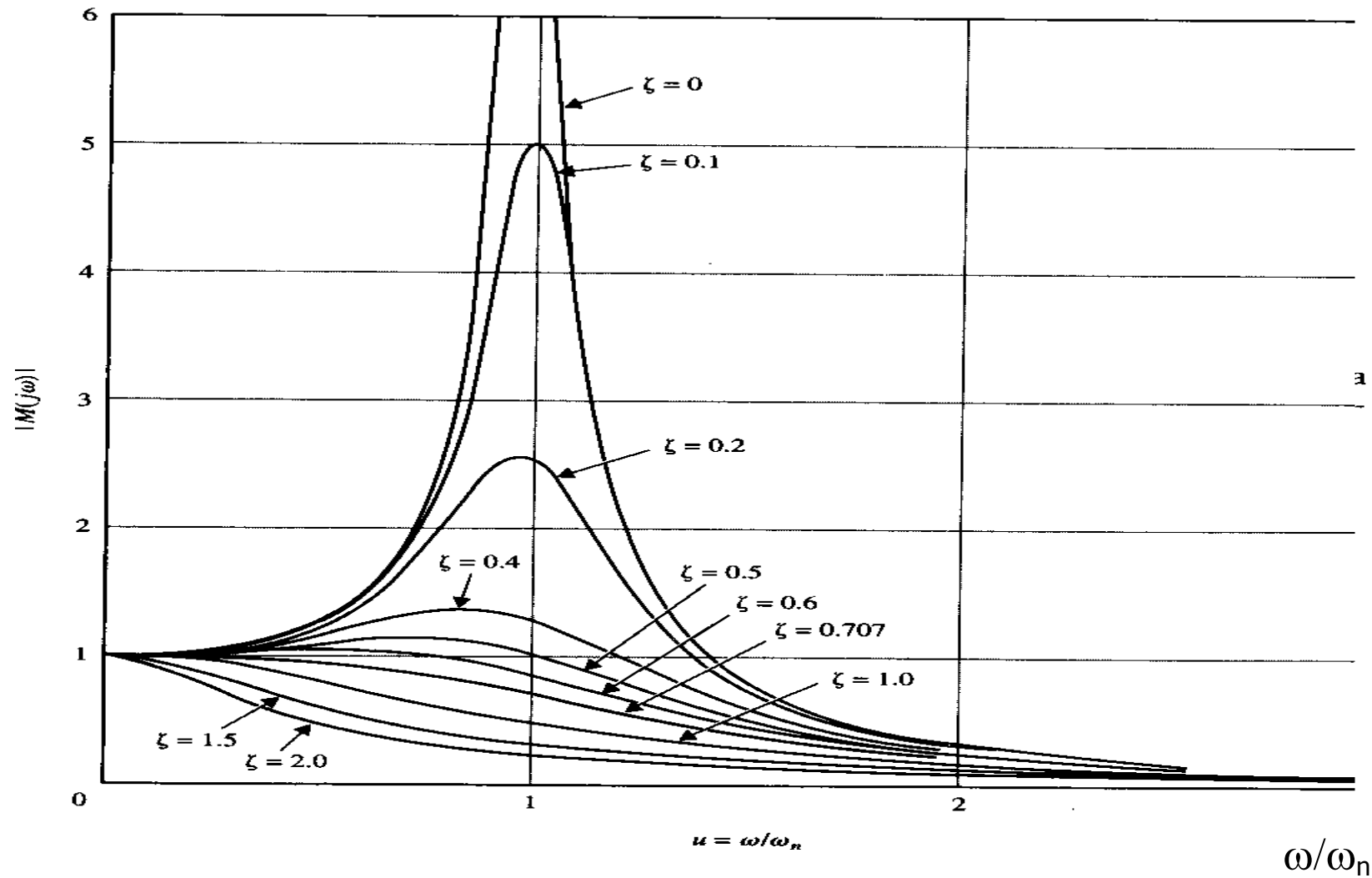
La respuesta en frecuencia es:

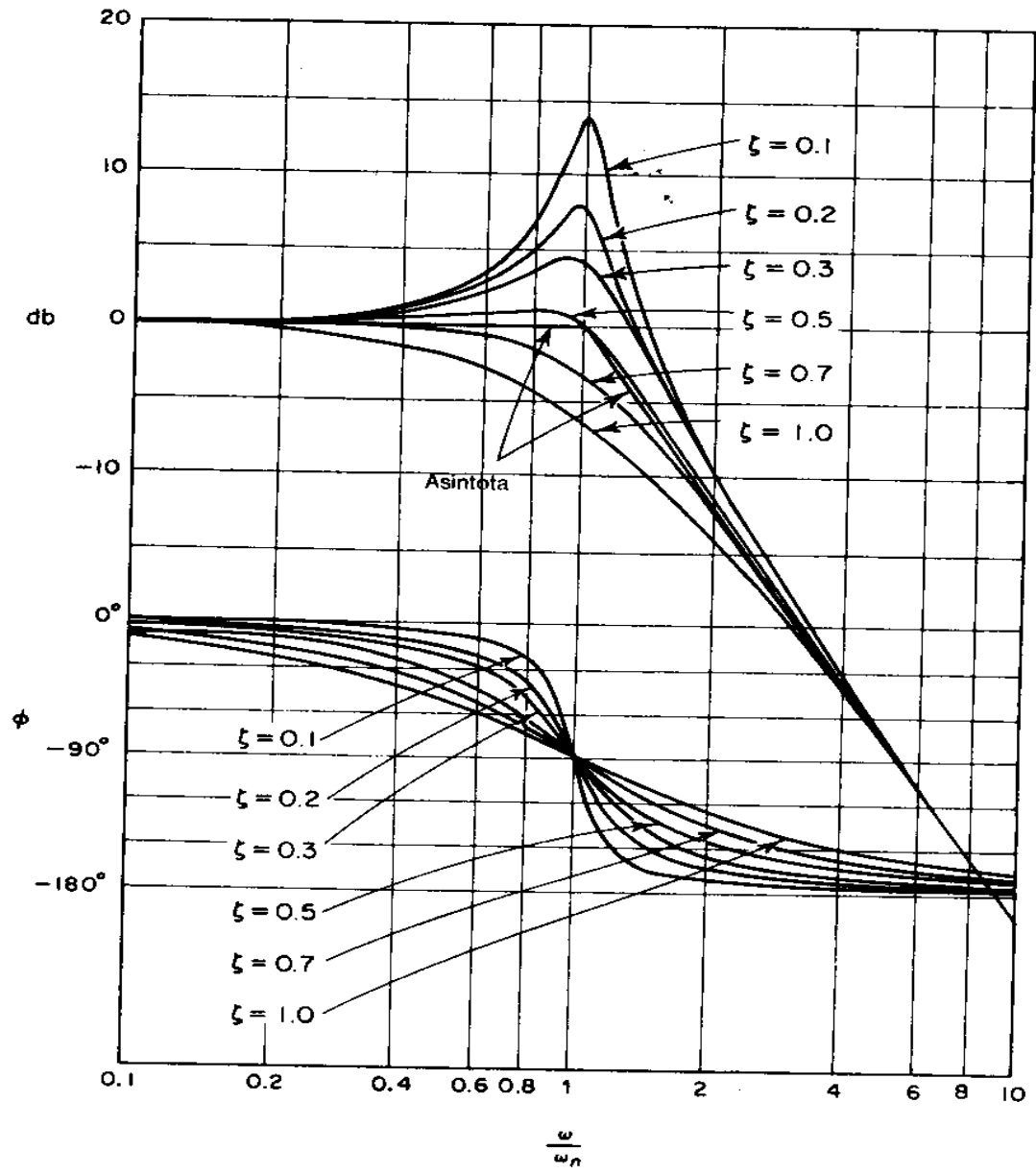
$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

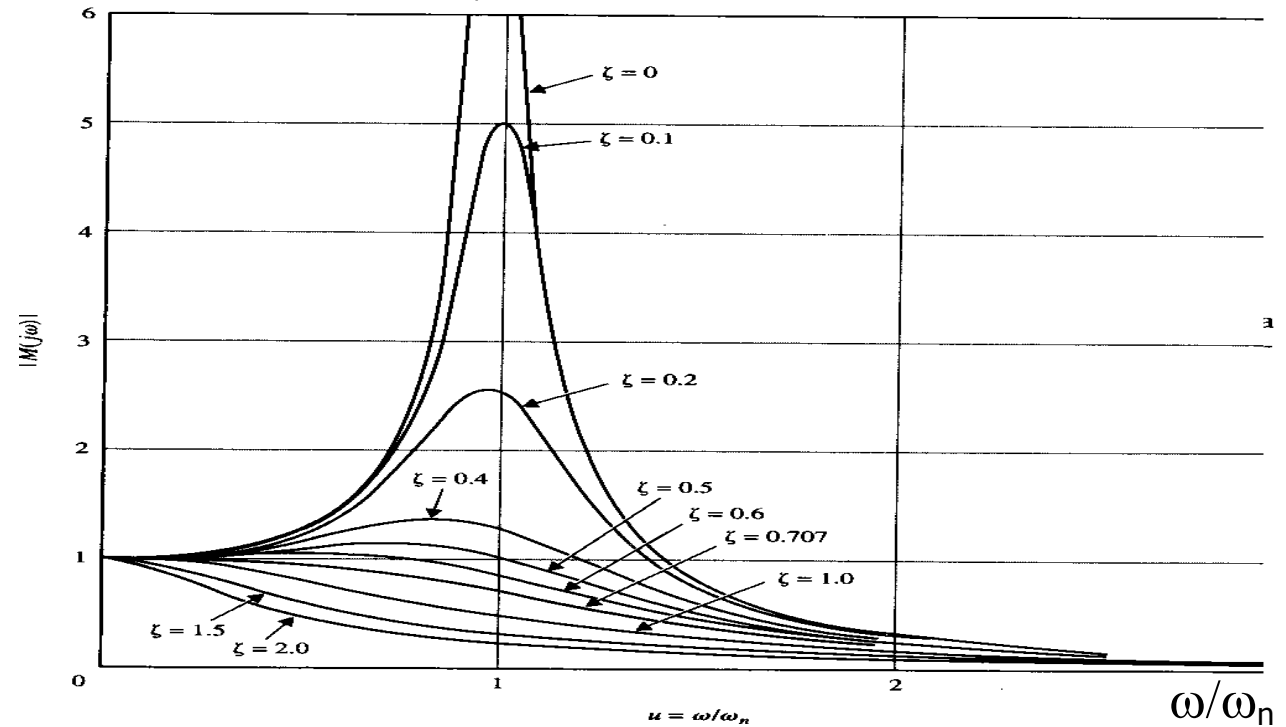
La dependencia respecto de ω es a través de la "frecuencia normalizada" ω/ω_n

Veamos como es esta respuesta, y luego calcularemos M_r , ω_r , BW. Graficando el módulo de la respuesta en frecuencia vs. ω/ω_n para distintos valores de ζ :

Módulo de la respuesta en frecuencia. Sistema de orden 2.







- El ancho de banda es proporcional a ω_n (si ζ fijo).
- El pico de resonancia depende solo de ζ !!!
- El pico de resonancia disminuye con ζ crecientes.
Es ∞ si $\zeta = 0$, es 1 si $\zeta \geq 0,707$
- La frecuencia de resonancia ω_r disminuye con ζ crecientes.
Es ω_n si $\zeta = 0$, es 0 si $\zeta = 0,707$

Pico de resonancia M_r

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

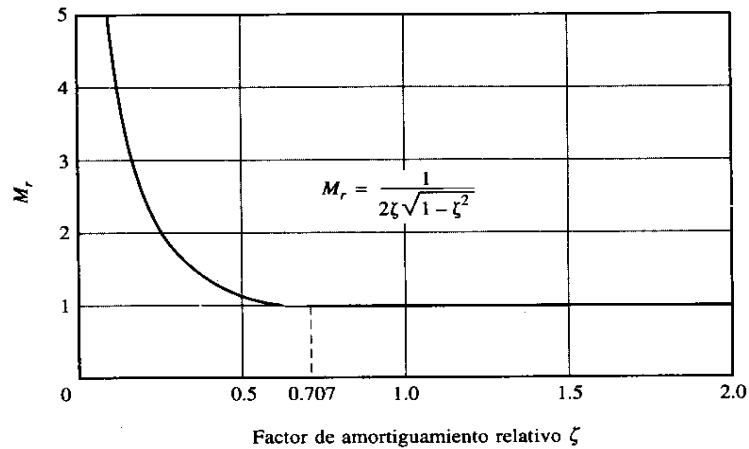


Figura 9-4 M_r en función del factor de amortiguamiento relativo para un sistema de segundo orden.

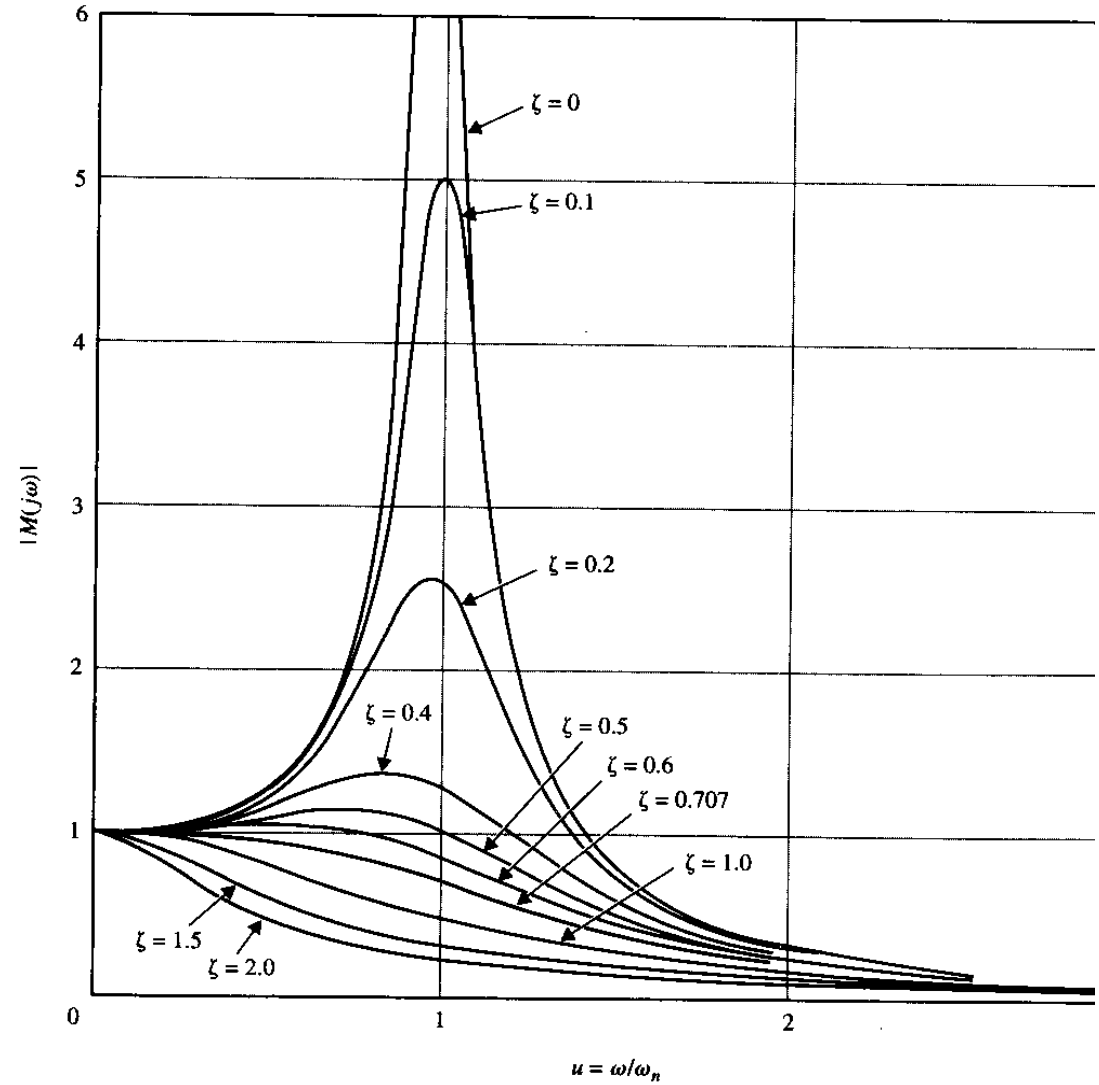


Figura 9-3 Magnitud en función de la frecuencia normalizada de un sistema de control en lazo cerrado de segundo orden.

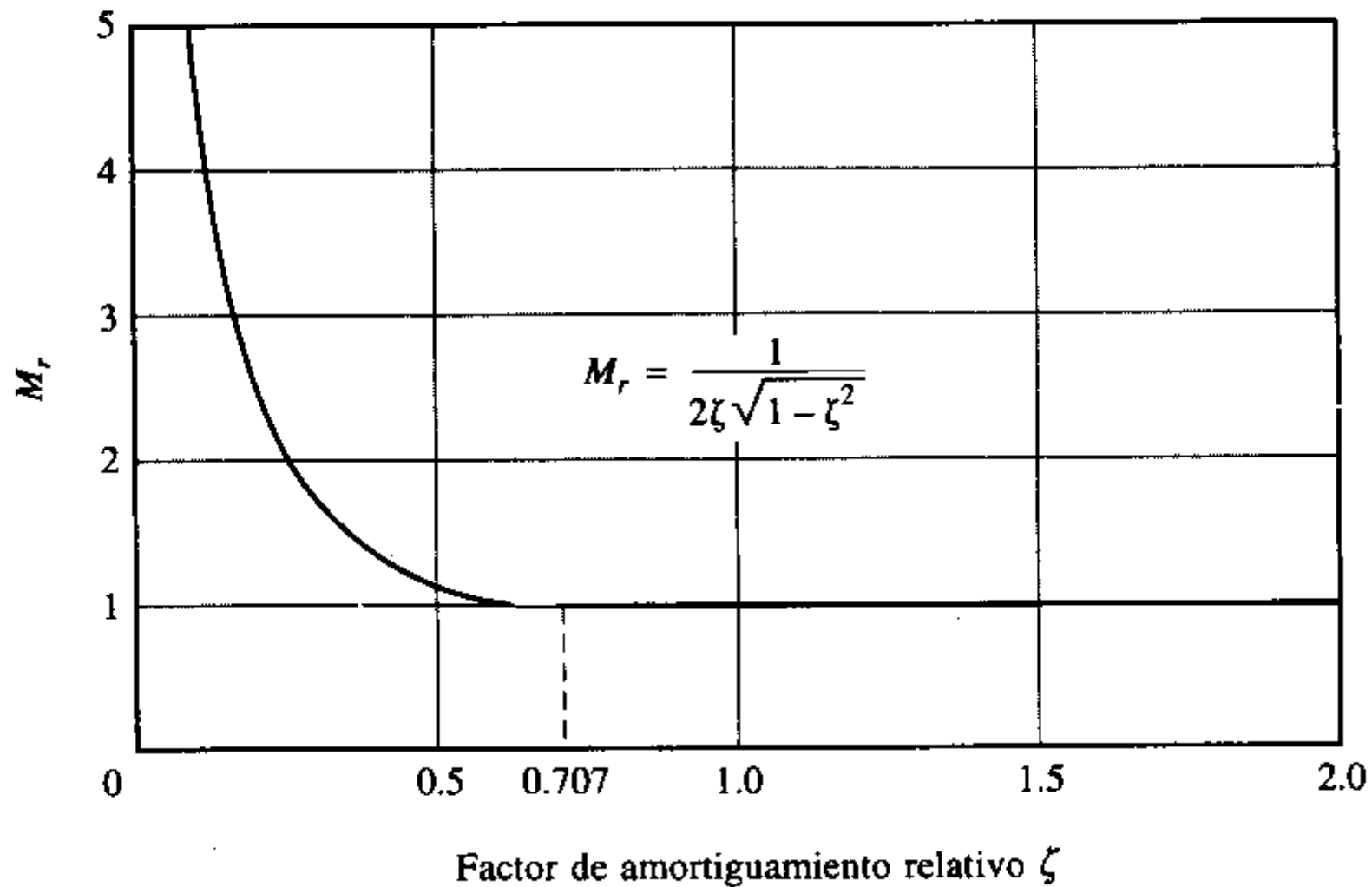
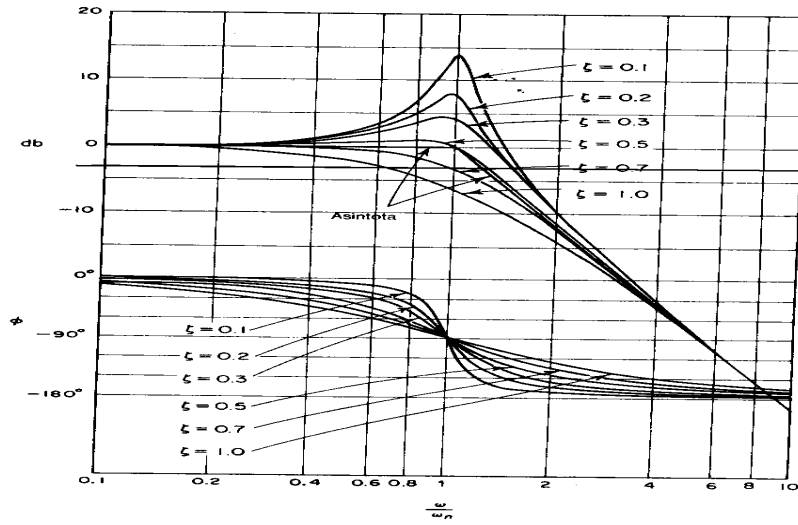


Figura 9-4 M_r en función del factor de amortiguamiento relativo para un sistema de segundo orden.

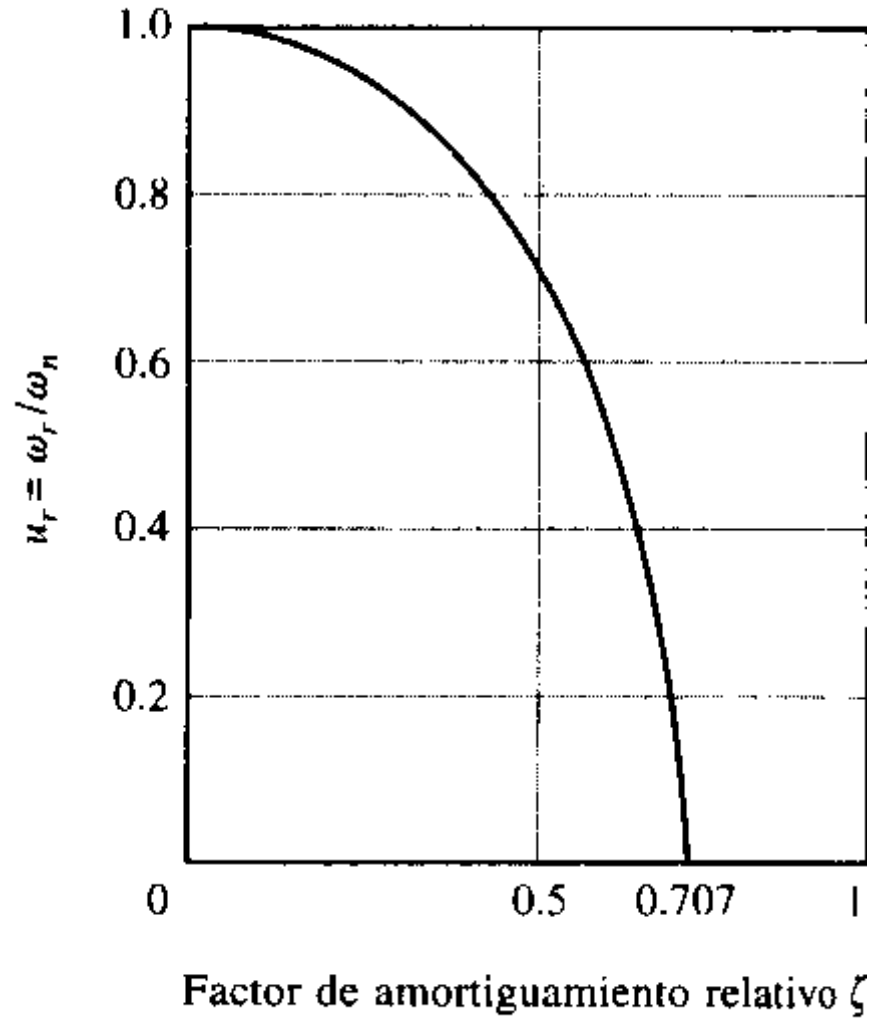
Frecuencia de resonancia ω_r



$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

obsérvese que

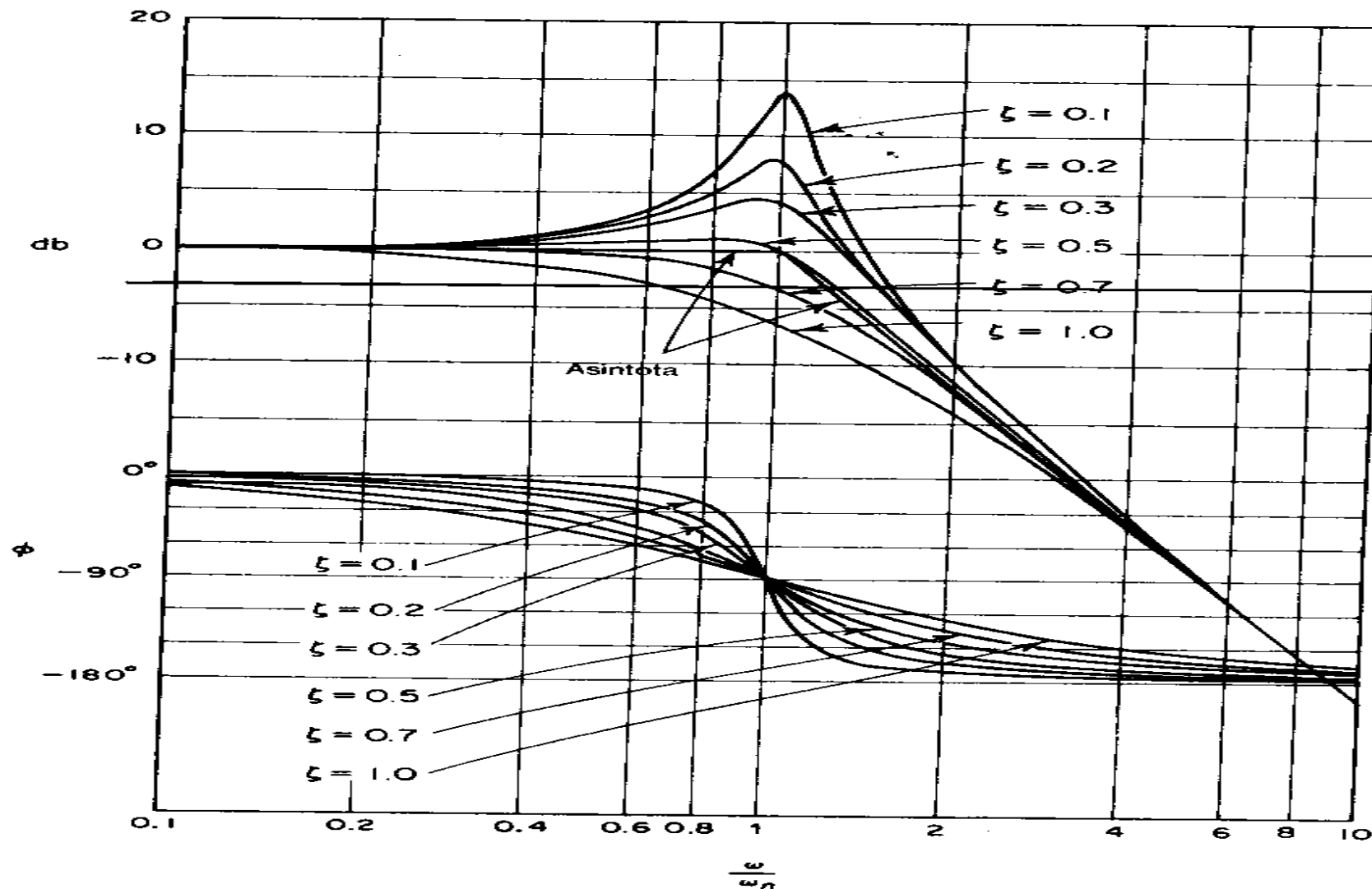
$$\omega_r \leq \omega_d \leq \omega_n$$



Ancho de banda – BW

A ω_n fijo, el ancho de banda disminuye con ζ

A ζ fijo el ancho de banda es proporcional a ω_n



Dependencia de BW respecto la relación de amortiguamiento ζ

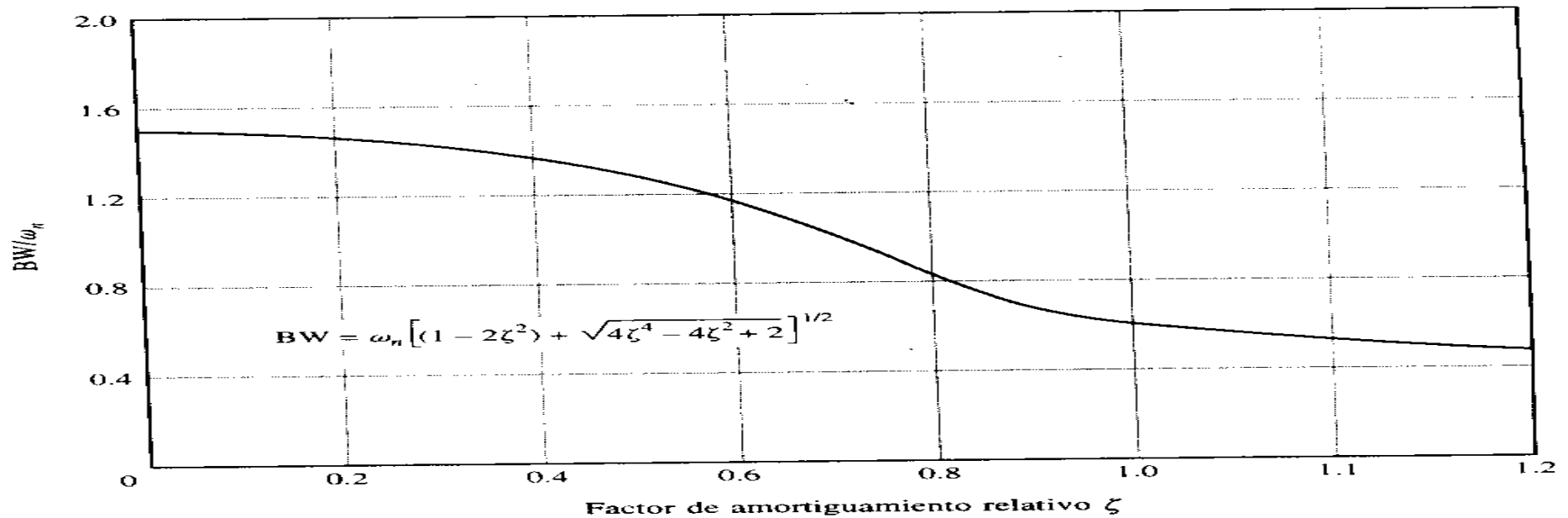
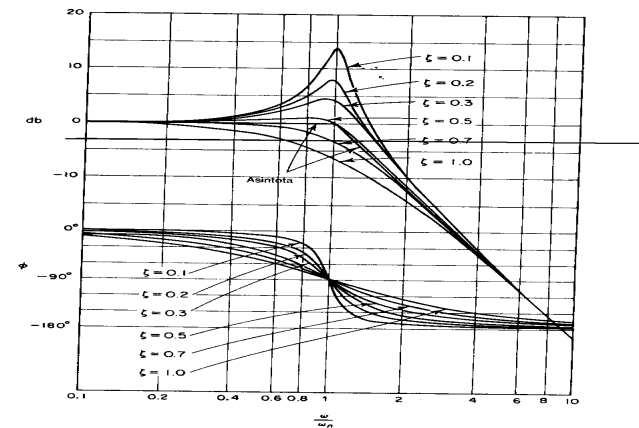
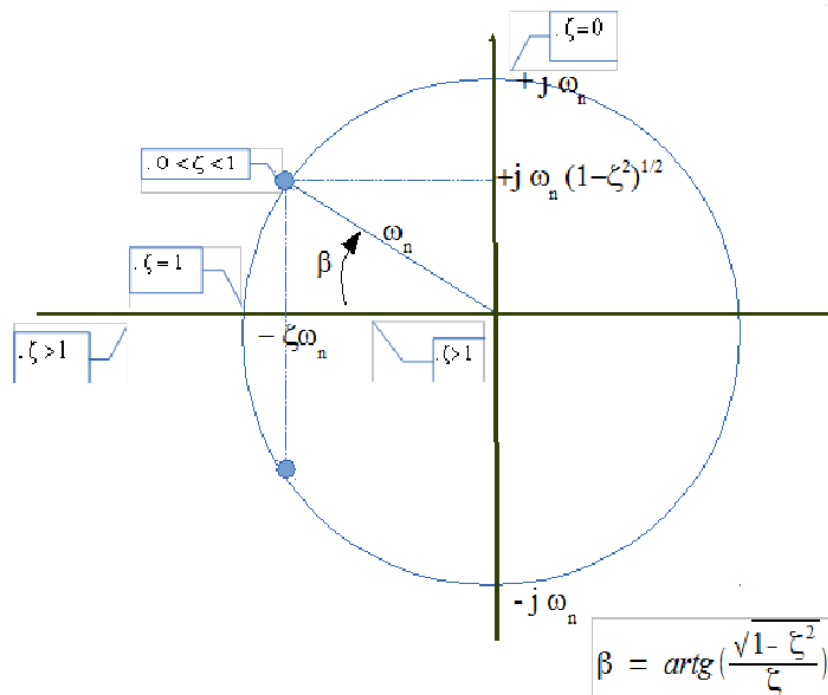
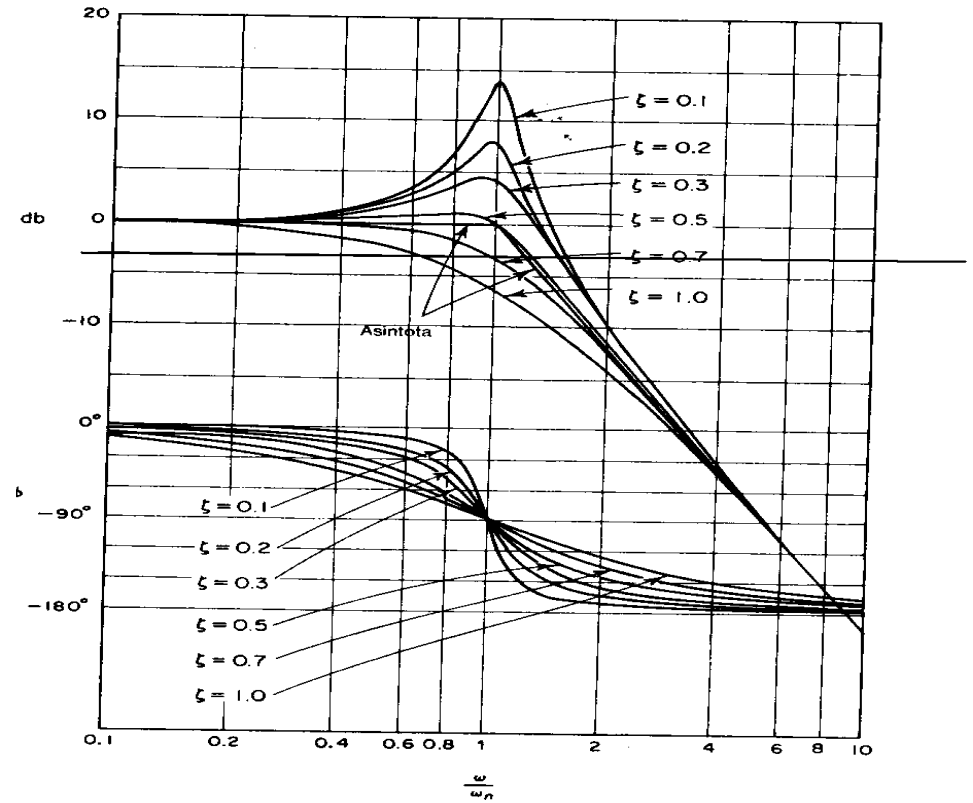
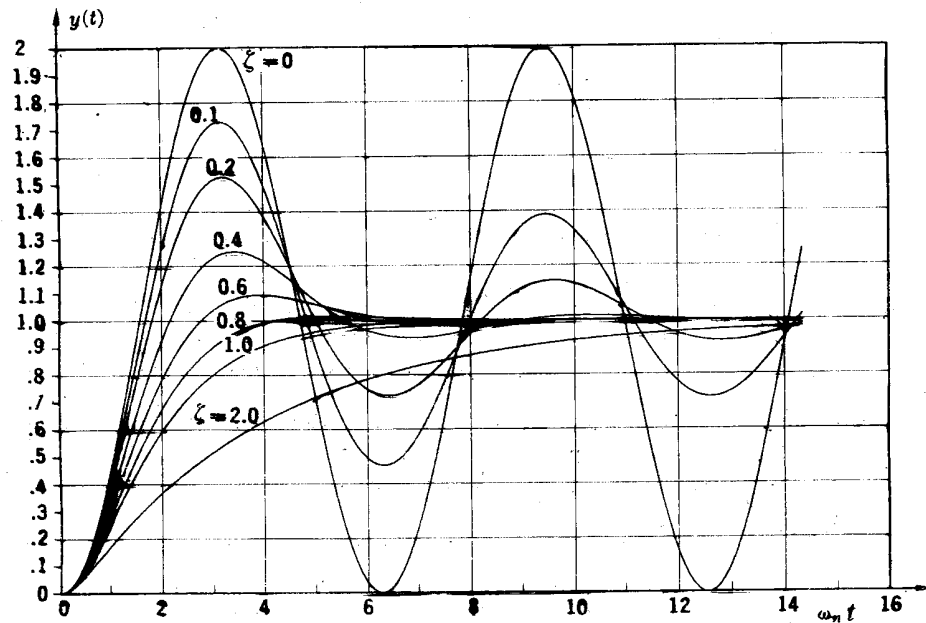


Figura 9-6 Ancho de banda/ ω_n en función del factor de amortiguamiento relativo para un sistema de segundo orden.

$$BW = \omega_n \left[(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2}$$





Relación tiempo de levantamiento – ancho de banda

$$0.35 < \zeta < 1$$

$$BW \cdot t_r \cong 2$$

(error 15%)

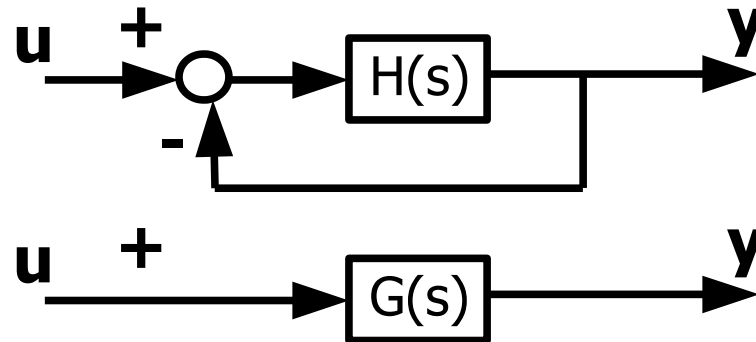
Márgenes de estabilidad.

Relación entre el margen de fase y la respuesta transitoria

Sea $H(s)$, la ganancia del lazo abierto que realimentaremos.

La ganancia del lazo cerrado es

$$G(s) = H(s) / (1 + H(s))$$



Es natural que a mayor margen de fase de $H(s)$,

- más lejos se está de la inestabilidad.
- los polos dominantes del lazo cerrado se encuentran más alejados del semiplano derecho.
- los polos dominantes del lazo cerrado son más amortiguados.
- la respuesta a escalón del lazo cerrado es menos oscilatoria.

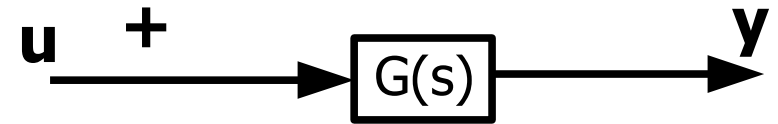
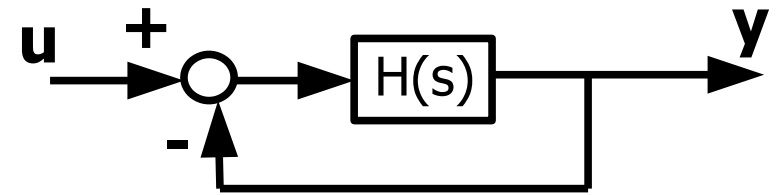
Ejemplo.

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Entonces,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Con $\zeta = 0.2, 0.4, 0.6$



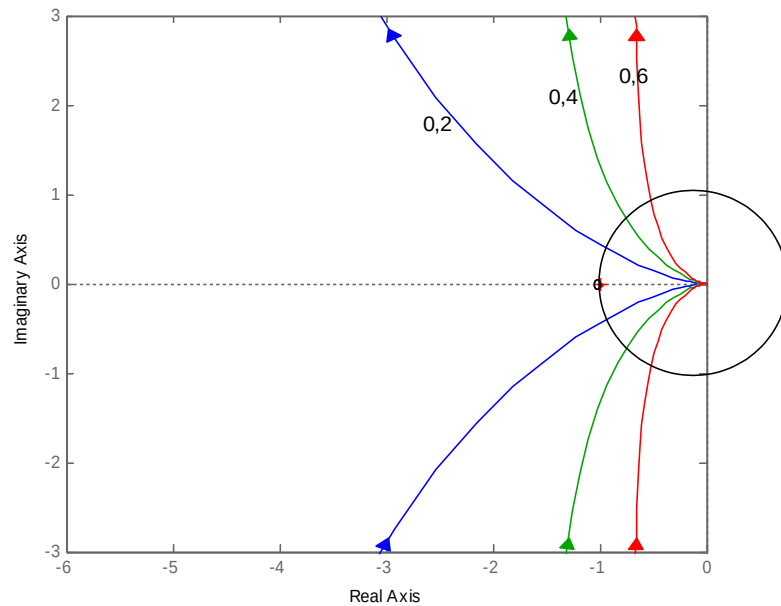
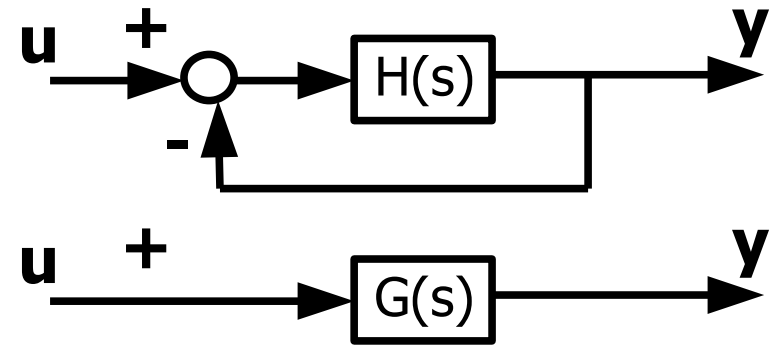
Ejemplo.

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Con $\zeta = 0.2, 0.4, 0.6$

Entonces,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

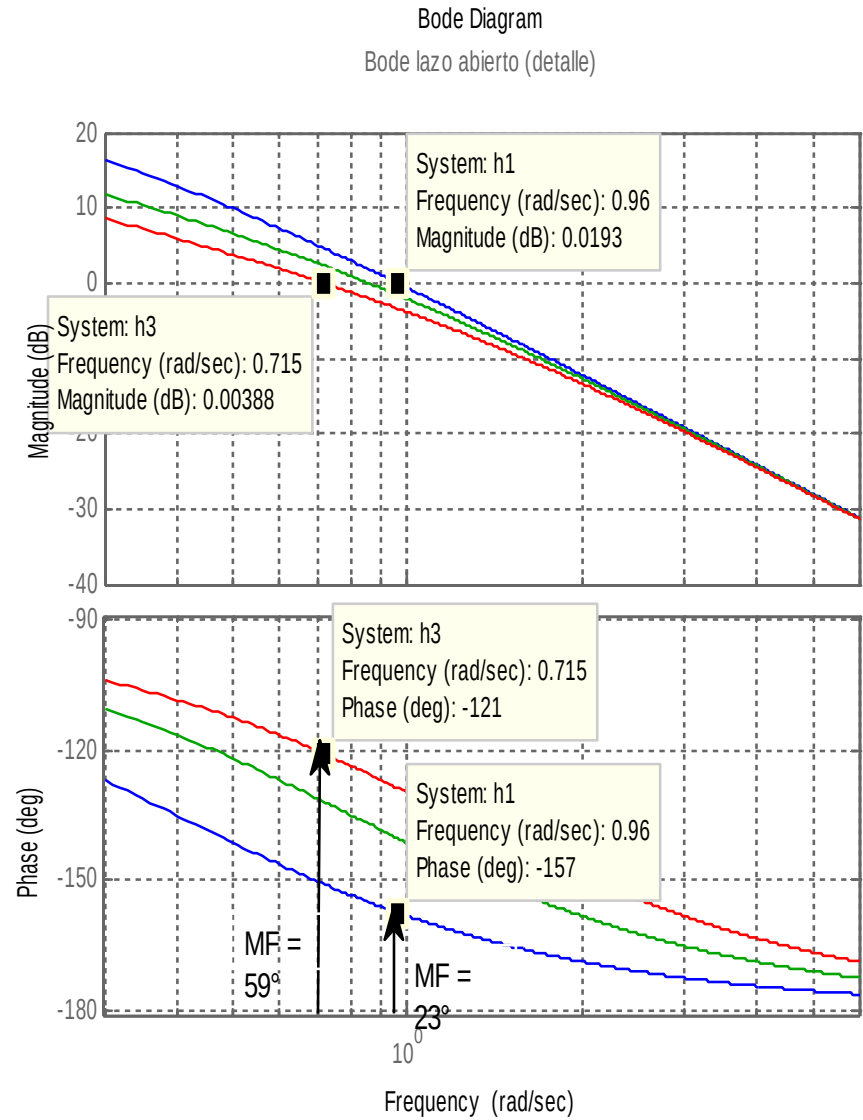
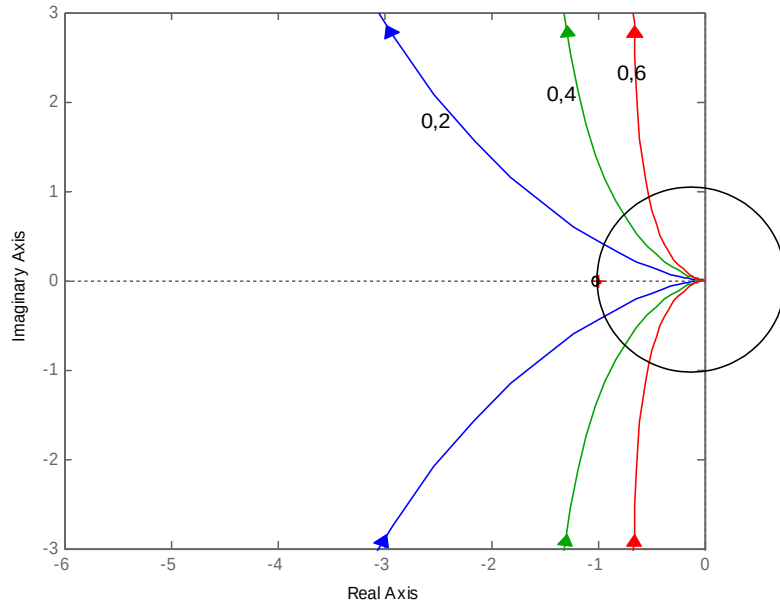


Los márgenes de fase son bien distintos para $\zeta = 0.2, 0.4, 0.6$

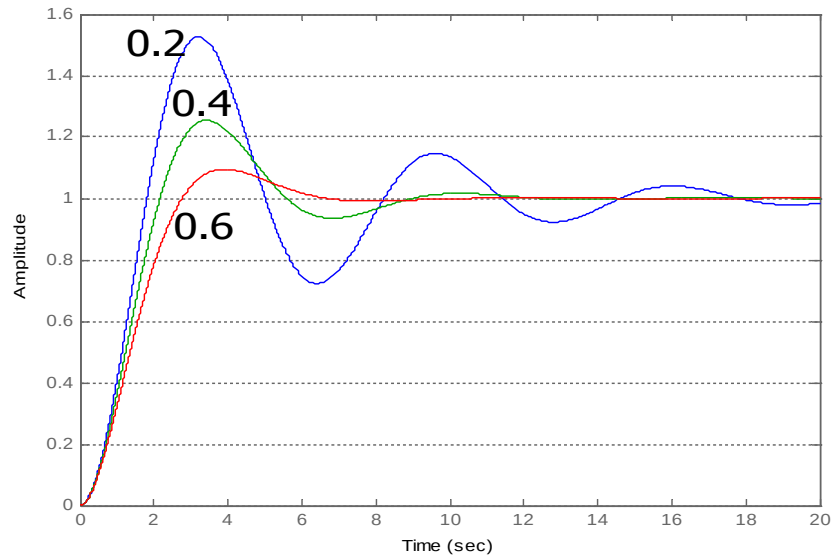
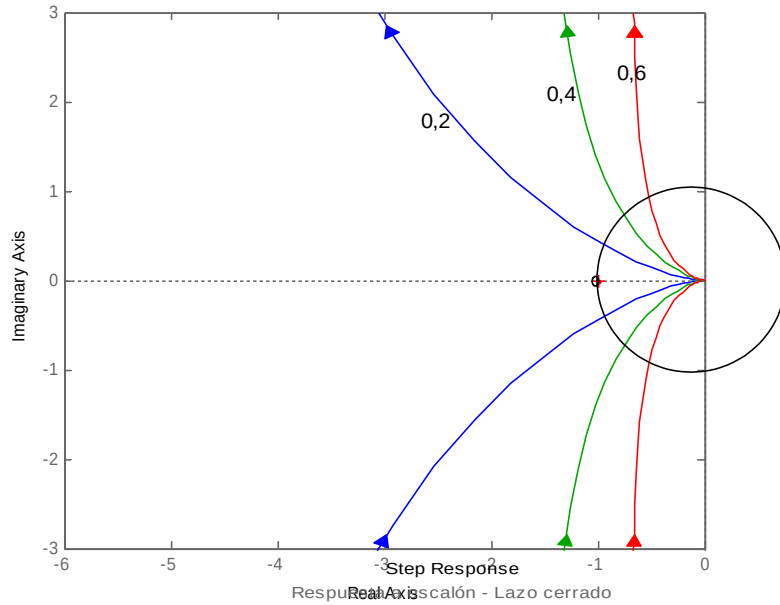
estos son (aproximadamente):

| ζ | ϕ_M |
|---------|----------|
| 0.2 | 23° |
| 0.4 | 43° |
| 0.6 | 59° |

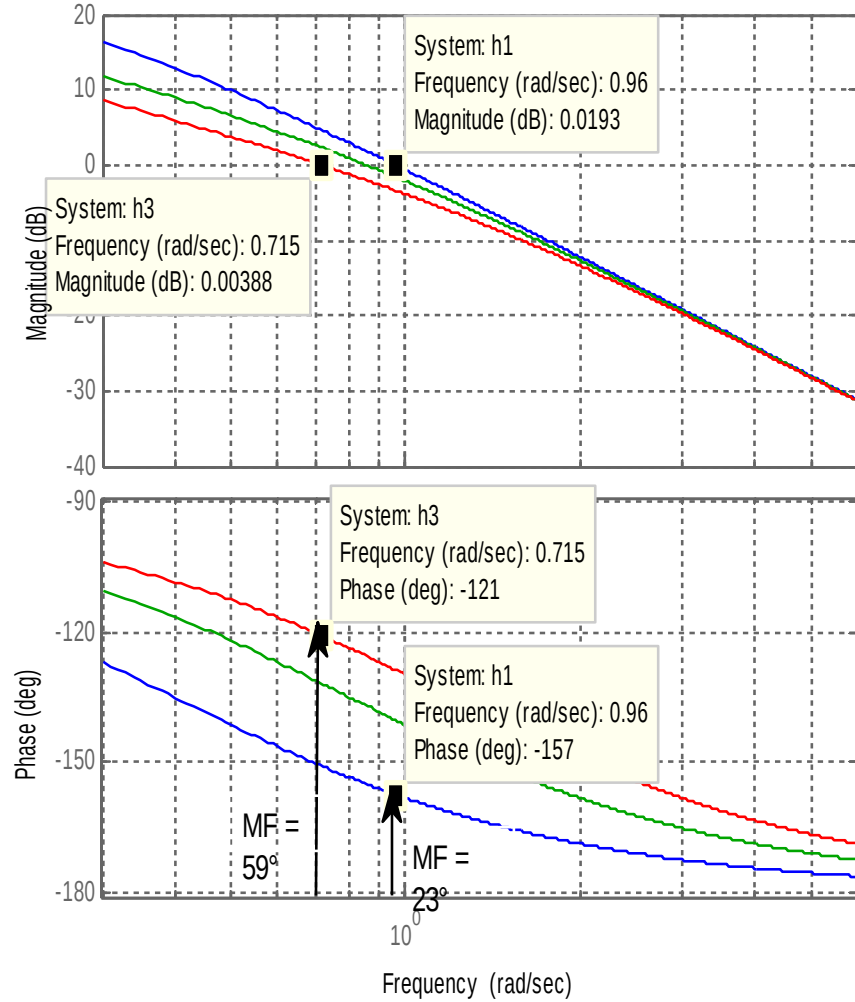
Margen de fase y respuesta transitoria:



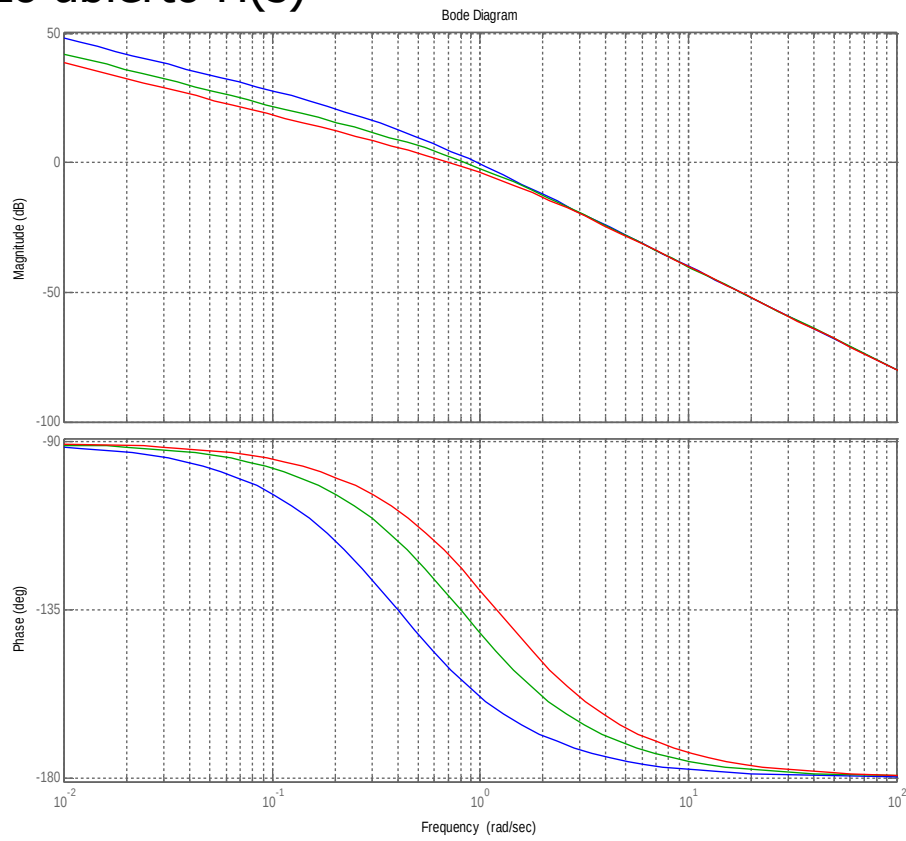
Margen de fase y respuesta transitoria:



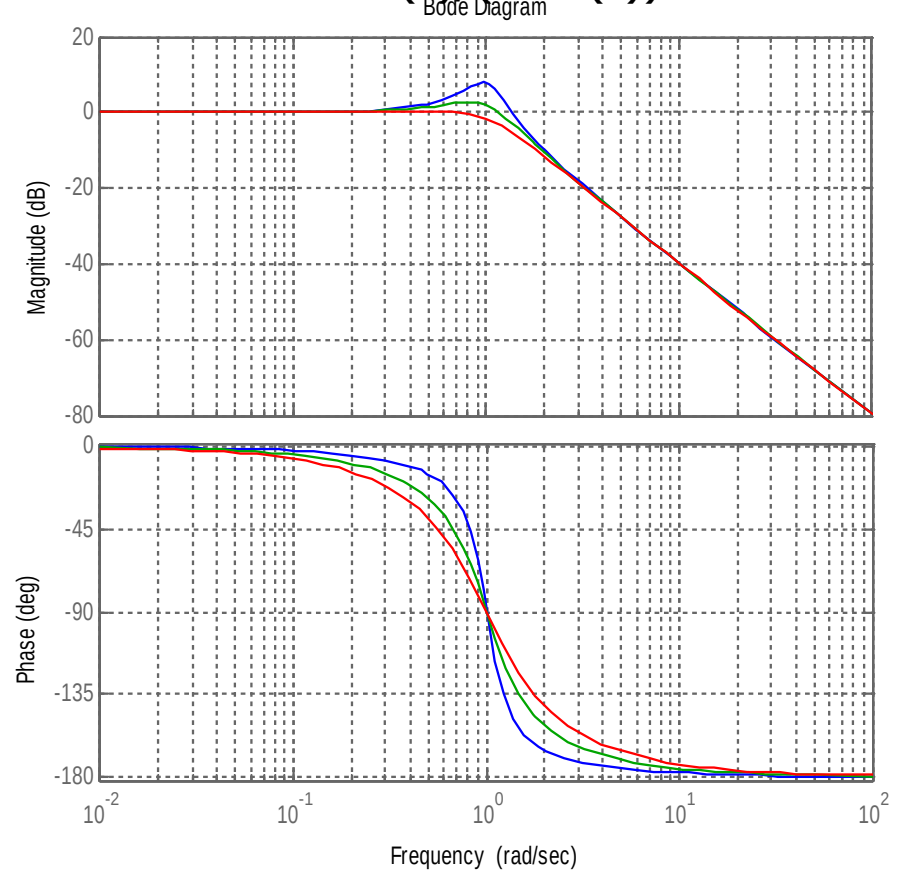
Bode Diagram
Bode lazo abierto (detalle)



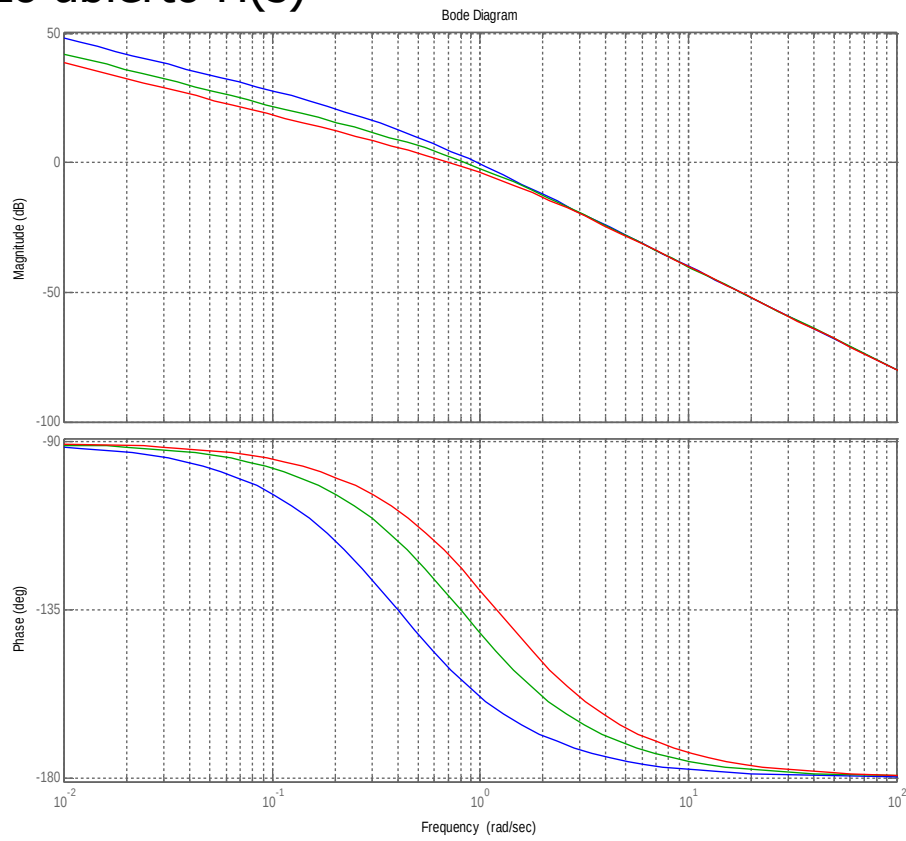
Lazo abierto $H(s)$



Lazo cerrado $H(s)/(1+H(s))$



Lazo abierto $H(s)$



Lazo cerrado $H(s)/(1+H(s))$

