- **Escriba cédula y nombre en cada hoja.**
- **Numere cada una de las hojas.**
- **Escriba en un solo lado de la hoja.**
- **Empiece cada ejercicio en una nueva hoja.**
- **Indique el total de hojas entregadas en la primera.**

Ejercicio 1

El encargado de abastecimiento debe planificar la compra semanal para un conjunto de materiales de producción que adquiere en plaza. Conoce las necesidades diarias para cada uno de los materiales, el costo diario de mantener en stock una unidad y el costo unitario de compra. Si bien existe un valor máximo que se puede almacenar de cada material, es posible almacenar más que esta capacidad fijada pero al doble del costo de mantenimiento.

Formular un modelo matemático para el problema de determinar el plan de abastecimiento que permita cumplir con la demanda diaria y que minimice la suma de los costos involucrados. Detallar las suposiciones realizadas y los componentes del modelo (parámetros, variables de decisión, restricciones y función objetivo).

Aclaración: Lo que se brinda a continuación es una posible respuesta de lo que se considera una solución correcta.

Se asume que:

- El espacio de almacenamiento depende de cada material y es el mismo para todos los días, y se mide en unidades de materiales.
- La cantidad inicial de stock para todos los materiales es cero.

Parámetros:

- M : cantidad de materiales distintos.
- T : cantidad de días a considerar.
- D_{mt} : demanda requerida del material m en el día t, con $m = 1,...,M$, $t = 1,...,T$.
- c_{mt} : costo de comprar el material m en el día t, con $m = 1,...,M$, $t = 1,...,T$.
- h_{mt} : costo de mantener en stock el material m en el día t, con $m = 1,...,M$, $t = 1,...,T$.
- C_m : capacidad de almacenamiento para cada material m, con $m = 1,...,M$.

Variables de decisión:

- x_{mt} : cantidad a comprar del material m en el día t, con $m = 1,...,M$, $t = 1,...,T$.
- y_{mt} : cantidad del material m a mantener en stock dentro de la capacidad en el día t, con $m = 1,...,M$, $t = 0,1,...,T$.

- u_{mt} : cantidad del material *m* a mantener en stock por fuera de la capacidad en el día *t*, con *m* = 1,...,*M*, *t* = 1,...,*T*.

Modelo matemático:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T} c_{mt}x_{mt} + h_{mt}y_{mt} + 2h_{mt}u_{mt} \\
&\text{sujeto a :} \\
&y_{mt} + u_{mt} = y_{m(t-1)} + u_{m(t-1)} + x_{mt} - D_{mt}, \quad \forall m = 1,\ldots,M, t = 1,\ldots,T \\
&y_{m0} = u_{m0} = 0, \quad \forall m = 1,\ldots,M \\
&y_{mt} \le C_m, \quad \forall m = 1,\ldots,M, t = 1,\ldots,T \\
&x_{mt}, y_{mt}, u_{mt} \ge 0, \quad \forall m = 1,\ldots,M, t = 1,\ldots,T
\end{aligned}
$$

La función objetivo es para minimizar el costo total que se compone de la suma para cada día de comprar cada material y de mantener en stock dentro y fuera de la capacidad de almacenamiento.

La primer restricción es para obtener el nivel total de stock diario para cada material, teniendo en cuenta ambos stocks (dentro y fuera de capacidad). Notar que debido a la minimización de los costos, la variable u_{mt} solo será positiva en aquellos casos en que el nivel de stock total y_{mt} supere la capacidad C_m, ya que el costo asociado de la variable u_{mt} es el doble del costo de la variable y_{mt}.

La segunda restricción es para indicar que el nivel inicial de stock de cada material es cero.

La tercer restricción es para determinar la porción de stock que queda dentro de la capacidad de almacenamiento (variable y_{mt}).

La cuarta y última restricción es para indicar los valores posibles que pueden tomar las variables de decisión.

Ejercicio 2

Resuelva el siguiente problema de Programación Lineal mediante el algoritmo de Simplex Revisado.

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\
s.a. & \\
& -x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Comenzamos por escribir el problema en forma estándar, agregando variables de holgura:

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\
s.a. & \\
& -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Las variables de holgura brindan una solución básica factible inicial: $x_B = (x_4, x_5, x_6)$. La matriz básica correspondiente (formada por las columnas de las variables básicas) y su inversa están dadas por $B = B^{-1} = I$.

Luego, calculamos los valores iniciales de:

- Los multiplicadores simplex: $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (0,0,0)$
- El lado derecho transformado: $\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- El valor objetivo: $\bar{z} = c_B^T B^{-1} b = 0$

<u>Iteración 1:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$
\begin{aligned}
\overline{c_1} &= c_1 - \pi^T a_1 = -1 - (0,0,0)(-1,2,1)^T = -1 \\
\overline{c_2} &= c_2 - \pi^T a_2 = -2 - (0,0,0)(4,2,1)^T = -2 \\
\overline{c_3} &= c_3 - \pi^T a_3 = 1 - (0,0,0)(-1,-1,2)^T = 1
\end{aligned}
$$

Ya que todos los costos reducidos son negativos podemos tomar cualquiera de las variables para entrar a la base. Elegimos la variable no básica x_2.

La columna correspondiente a x_2 expresada en la base actual es $\overline{a_2} = B^{-1} a_2 = (4,2,1)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

4	5	1	0	0
2	5	0	1	0
1	6	0	0	1
-2	0	0	0	0

La variable saliente es x_4 y el tableau luego del pivoteo queda:

1	5/4	1/4	0	0
0	5/2	-1/2	1	0
0	19/4	-1/4	0	1
0	5/2	1/2	0	0

La nueva variable básica es $x_B = (x_2, x_5, x_6)$ con un valor objetivo $z = -5/2$.

<u>Iteración 2:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_1} = c_1 - \pi^T a_1 = -1 - (-1/2,0,0)(-1,2,1)^T = -3/2$$
$$\overline{c_3} = c_3 - \pi^T a_3 = 1 - (-1/2,0,0)(-1,-1,2)^T = 1/2$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - (-1/2,0,0)(1,0,0)^T = 1/2$$

Ingresa la variable no básica x_1 a la base.

La columna correspondiente a x_1 expresada en la base actual es $\overline{a_1} = B^{-1}a_1 = (-1/4,5/2,5/4)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

-1/4	5/4	1/4	0	0
5/2	5/2	-1/2	1	0
5/4	19/4	-1/4	0	1
-3/2	5/2	1/2	0	0

La variable saliente es x_5 y el tableau luego del pivoteo queda:

0	3/2	1/5	1/10	9
1	1	-1/5	2/5	0
0	7/2	0	-1/2	1
0	4	1/5	3/5	0

La nueva variable básica es $x_B = (x_2, x_1, x_6)$ con un valor objetivo $z = -4$.

<u>Iteración 3:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_3} = c_3 - \pi^T a_3 = 1 - (-1/5,-3/5,0)(-1,-1,2)^T = 1/5$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - (-1/5,-3/5,0)(1,0,0)^T = 1/5$$
$$\overline{c_5} = c_5 - \pi^T a_5 = 0 - (-1/5,-3/5,0)(0,1,0)^T = 3/5$$

Ninguna de las variables no básicas tiene costo reducido negativo, por lo tanto la solución actual es óptima.

Por lo tanto la solución óptima del problema original es $x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 0$ y el valor óptimo es $z = 4$.

Ejercicio 3

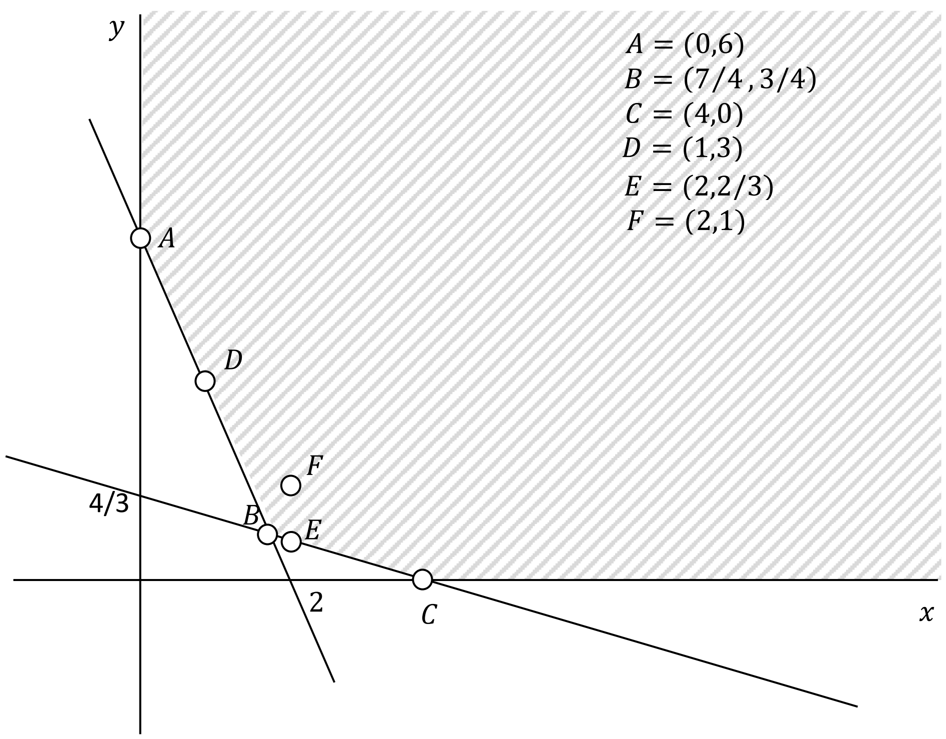
Solucionar el siguiente problema de Programación Entera con el método *Branch & Bound*. Dibujar la región factible, solucionar los subproblemas lineales en forma gráfica y dibujar el árbol que se genera.

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = x + y \\
s.a. & \\
 & x + 3y \geq 4 \\
 & 3x + y \geq 6 \\
 & x, y \geq 0 \text{ y enteras}
\end{array}
$$

Comenzamos por escribir el problema de programación lineal $P0_L$ que se obtiene de relajar el problema entero original $P0$, quitando la restricción de integridad sobre las variables.

$$
P0_L \left\{
\begin{array}{ll}
\min & z = x + y \\
s.a. & \\
 & x + 3y \geq 4 \\
 & 3x + y \geq 6 \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Dibujamos la región factible del problema:



De la región factible correspondiente a $P0_L$, tenemos que la solución óptima se da en el punto $B = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$ con valor óptimo $z = \frac{5}{2}$. Cómo la solución óptima no es entera, ramificamos en una de las variables continuas. Ramificamos en $x \leq 1$ y $x \geq 2$, obteniendo los subproblemas $P1$ y $P2$ siguientes:

$$P1 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases} \qquad P2 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \geq 2 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases}$$

1. Si relajamos $P1$ obtenemos un problema de programación lineal $P1_L$ que tiene solución óptima en el punto $D = (1,3)$ con $z = 4$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P1$ y el problema está vacío.

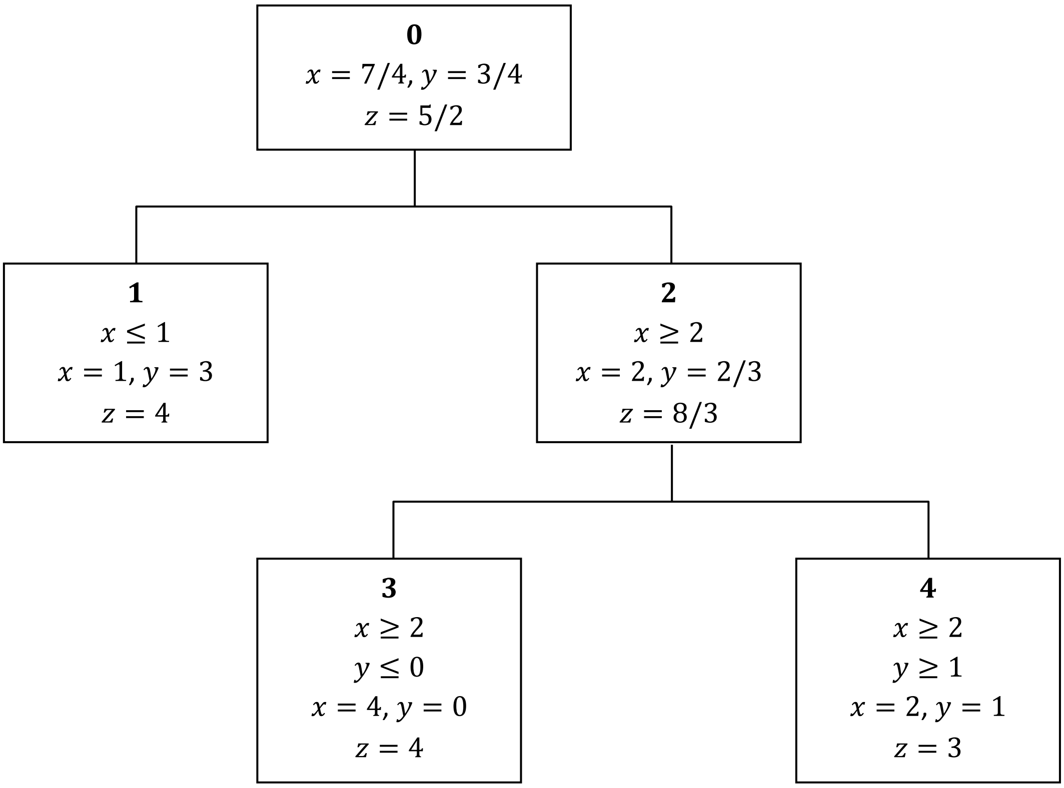
2. Si relajamos $P2$ obtenemos un problema de programación lineal $P2_L$ que tiene solución óptima en el punto $E = (2,2/3)$ con $z = 8/3$. Cómo la solución óptima no es entera, ramificamos en $y \leq 0$ y $y \geq 1$, obteniendo los subproblemas $P2.1$ y $P2.2$ siguientes:

$$P2.1 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \geq 2 \\ & y \leq 0 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases} \qquad P2.2 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \geq 2 \\ & y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases}$$

   1. Si relajamos $P2.1$ obtenemos un problema de programación lineal $P2.1_L$ que tiene solución óptima en el punto $C = (4,0)$ con $z = 4$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P2.1$ y el problema está vacío.

   2. Si relajamos $P2.2$ obtenemos un problema de programación lineal $P2.2_L$ que tiene solución óptima en el punto $F = (2,1)$ con $z = 3$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P2.2$ y el problema está vacío.

Todos los problemas generados están vacíos y por lo tanto el problema original solucionado. La solución óptima es $x = 2$, $y = 1$ con valor óptimo $z = 3$. El árbol de búsqueda generado es el siguiente:


0
x = 7/4, y = 3/4
z = 5/2
1
x ≤ 1
x = 1, y = 3
z = 4
2
x ≥ 2
x = 2, y = 2/3
z = 8/3
3
x ≥ 2
y ≤ 0
x = 4, y = 0
z = 4
4
x ≥ 2
y ≥ 1
x = 2, y = 1
z = 3